

ALMA MATER STUDIORUM • UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Link Floer Homology in spazi lenticolari

Tesi di laurea in Topologia Algebrica

Relatore:
Prof.
Michele Mulazzani

Presentata da:
Lorenzo Rigolli

Co-relatrice:
Dott.ssa
Alessia Cattabriga

Co-relatore:
Dott.
Enrico Manfredi

Sessione I
Anno accademico 2012/2013

Indice

Introduzione	iii
1 Prerequisiti e Link Floer Homology	1
1.1 Spezzamenti di Heegaard	4
1.2 Spazi lenticolari	6
1.2.1 Rappresentazione di $L(p, q)$ come quoziente di S^3 . . .	6
1.2.2 Proprietà degli spazi lenticolari	6
1.2.3 Rappresentazione di $L(p, q)$ tramite spezzamento di Heegaard	7
1.3 Nodi e link	9
1.3.1 Omologia	10
1.4 Link Floer Homology	11
2 Grid diagrams	19
2.1 Rappresentazione in S^3	19
2.2 Rappresentazione in $L(p, q)$	21
2.3 Sollevamento ad S^3	25
3 Descrizione combinatoria della Link Floer Homology	29
3.1 Descrizione combinatoria della HFK in S^3	29
3.1.1 Generatori	29
3.1.2 Operatore di bordo	30
3.1.3 Gradazione di spin	33
3.1.4 Gradazione di Maslov	33
3.1.5 Gradazione di Alexander	34
3.1.6 Omologia	35
3.2 Descrizione combinatoria della HFL in S^3	36
3.2.1 Gradazione di Alexander	36
3.2.2 Omologia	37
3.3 Descrizione combinatoria della HFK in $L(p, q)$	37
3.3.1 Generatori	37

3.3.2	Operatore di bordo	39
3.3.3	Gradazione di spin	40
3.3.4	Gradazione di Maslov	41
3.3.5	Gradazione di Alexander	42
3.3.6	Omologia	43
3.4	Descrizione combinatoria della HFL in $L(p, q)$	43
3.4.1	Gradazione di Alexander	43
3.4.2	Omologia	44
3.5	Osservazioni	44
3.5.1	HFL è un invariante essenziale	44
3.5.2	HFK e orientazione di un nodo	45
3.5.3	Relazione tra HFL in $L(p, q)$ e HFL nel sollevamento	48
4	Calcolo della Link Floer Homology	49
4.1	Link in S^3	49
4.2	Link in $L(p, q)$	52
A	Programma per il calcolo delle gradazioni della HFL	75
	Bibliografia	85

Introduzione

La teoria dei nodi è una branca della topologia che si occupa di *nodi*, ovvero di curve chiuse intrecciate nello spazio, e di *link*, cioè di nodi concatenati tra loro. Le sue origini possono essere fatte risalire al XVIII secolo, ad opera di Vandermonde e Gauss; però, per la sua formalizzazione si è dovuto attendere l'inizio del XX secolo.

La prima domanda che sorge spontanea è chiedersi quando due nodi sono equivalenti, cioè quando due nodi apparentemente differenti possono essere deformati uno nell'altro. Una volta trovato un modo semplice per descrivere un nodo, e questa descrizione può essere data utilizzando i *diagrammi*, cioè delle proiezioni del nodo su un piano scelto opportunamente, si può rispondere a tale quesito. La risposta data nel 1927 da Reidemeister è che due nodi sono equivalenti se i loro diagrammi sono collegati l'uno all'altro mediante tre tipi di movimenti, detti *mosse di Reidemeister*. Questo risultato però non risolve il problema della classificazione dei nodi. Infatti il criterio fornito da Reidemeister non fornisce un algoritmo per stabilire se due nodi sono equivalenti, in quanto non stabilisce né quante né quali mosse siano necessarie per realizzare l'equivalenza.

Anche al fine di determinare la non equivalenza di due nodi, nel 1928 sono stati introdotti i primi *invarianti*, cioè oggetti algebrici associati a un nodo, invarianti rispetto alle mosse di Reidemeister. Se un invariante assume valori diversi per due nodi, ciò significa che i nodi non sono equivalenti. Tra gli invarianti più famosi calcolati in modo combinatorio troviamo il *polinomio di Alexander* e il *polinomio di Jones*, però ce ne sono molti altri e la *Link Floer Homology*, oggetto della tesi, è uno di questi. Tale invariante, definito grazie agli spezzamenti di Heegaard, è un adattamento alla teoria dei nodi della *Heegaard Floer Homology* che è un invariante per le 3-varietà.

La Link Floer Homology è stata introdotta nel 2003 indipendentemente da Rasmussen [Ras03] e da Ozsváth-Szabò [OS04.1]. Questo invariante è piuttosto potente, ma il suo calcolo a partire dalla definizione non è per niente agevole e richiede l'utilizzo di nozioni di geometria simplettica. Però nel 2006 Manolescu, Ozsváth e Sarkar [MOS06] trovano un metodo combinatorio

per calcolarlo nel caso di link in S^3 . Basandosi su tale procedimento, nel 2008, Baker, Grigsby e Hedden [BGH08] estendono il metodo per calcolare la Link Floer Homology di link contenuti in una classe più ampia di 3-varietà: gli spazi lenticolari. Nonostante il calcolo combinatorio risulti notevolmente più semplice, esso è computazionalmente abbastanza impegnativo. Stimolati dalla quasi totale mancanza di esempi di calcolo, in questa tesi calcoliamo la Link Floer Homology di alcuni link e facciamo alcune osservazioni a partire dai risultati ottenuti.

Storicamente i nodi sono stati introdotti in \mathbb{R}^3 o, equivalentemente, nella sua compattificazione uno-punto S^3 . Ciò non toglie che i nodi possono essere definiti in una qualsiasi varietà tridimensionale; in particolare in questa tesi ci occuperemo di studiare link negli spazi lenticolari. Gli spazi lenticolari $L(p, q)$ sono quozienti di S^3 rispetto ad azioni libere e finite e sono stati introdotti da Dyck nel 1884, il quale li ha definiti incollando opportunamente i bordi di due tori solidi [Dyc85]. Uno dei motivi per cui si studiano link in tali spazi è che essi sono le varietà tridimensionali più semplici dopo la sfera, però hanno interessanti proprietà. Sono una famiglia infinita di 3-varietà e, ad esempio, vi sono coppie di spazi lenticolari non omotopicamente equivalenti, che non sono distinguibili dal gruppo fondamentale né dall'omologia. Il problema della loro classificazione a meno di omeomorfismo è stato risolto da Reidemeister nel 1935 [Rei35] e quello della loro classificazione a meno di equivalenza omotopica è stato risolto da Whitehead nel 1941 [Whi41]. In particolare, il motivo per cui nella tesi consideriamo link in spazi lenticolari e non in 3-varietà più generiche, è che, oltre alla sfera e a $S^2 \times S^1$, tali spazi sono gli unici che possono essere rappresentati incollando opportunamente i bordi di due tori solidi.

Oltre alle applicazioni in topologia e nello studio delle 3-varietà, la teoria dei nodi ha trovato utilizzi in disparati campi scientifici. La sua prima applicazione fisica è dovuta a Lord Kelvin, che nel 1867, per descrivere gli atomi, propose il modello degli *atomi vortice*. Tale modello ipotizza che gli atomi siano onde intrecciate in un nodo [Tho67]. La teoria dei nodi ha anche un ruolo nella fisica teorica, nell'ambito della teoria delle stringhe, ed è utilizzata in biologia per studiare come le doppie eliche di DNA possono essere annodate e i modi in cui possono combinarsi [BM11]. Inoltre, alla luce della stretta connessione tra nodi e grafi, Jones introdusse il suo poliomio, che ha un importante ruolo nella descrizione di fenomeni della meccanica statistica [Jon89].

La tesi è organizzata come segue. Nel Capitolo 1 iniziamo richiamando alcuni fatti sulle 3-varietà e sulle loro tecniche di rappresentazione. In particolare, ci occupiamo degli spazi lenticolari, di cui enunciamo alcune proprietà e di

cui mostriamo due presentazioni equivalenti. Successivamente, spieghiamo cosa sono nodi e link e definiamo la *Knot Floer Homology* e la *Link Floer Homology* di nodi e link in spazi lenticolari.

Nel Capitolo 2 mostriamo una tecnica, basata sull'utilizzo dei *grid diagram*, per rappresentare link nella sfera tridimensionale. In seguito, spieghiamo come generalizzare questa tecnica per rappresentare link in spazi lenticolari. Concludiamo mostrando come sollevare un grid diagram di un link in $L(p, q)$, ad un grid diagram di un link in S^3 .

Nel Capitolo 3 illustriamo un metodo combinatorio per calcolare la *Knot Floer Homology* e la *Link Floer Homology* di nodi e link in S^3 . Poi generalizziamo questo metodo per applicarlo nel caso di link in spazi lenticolari. Concludiamo il capitolo con i risultati originali della tesi.

Il Capitolo 4 è dedicato al calcolo della *Link Floer Homology* di alcuni link in spazi lenticolari e in S^3 . Questi calcoli giustificano alcune delle conclusioni dedotte nel capitolo precedente.

In Appendice riportiamo il codice di un programma scritto per facilitare i calcoli del Capitolo 4.

Capitolo 1

Prerequisiti e Link Floer Homology

Nella prima parte del capitolo daremo alcune definizioni ed esporremo alcuni risultati fondamentali riguardanti i nodi e gli spazi lenticolari, mentre la parte finale è dedicata ad una breve descrizione della Link Floer Homology. L'ultima sezione, in cui ci limiteremo a fornire risultati senza darne una dimostrazione, ha lo scopo di mostrare intuitivamente il motivo per cui il calcolo della Link Floer Homology può essere ricondotto ad un algoritmo combinatorio.

Innanzitutto fissiamo alcune notazioni. Con $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ indichiamo la palla n -dimensionale e con $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ la sfera di dimensione n .

Ricordiamo che $Diff$ è la categoria delle varietà differenziabili e applicazioni C^∞ , Top quella delle varietà topologiche e applicazioni continue, mentre PL è la categoria delle varietà triangolabili e applicazioni PL. In tutta la tesi utilizzeremo il fatto che in dimensione 3 queste categorie sono equivalenti.

Definizione 1.0.1. Il *toro standard* in \mathbb{R}^3 (vedi Figura 1) è l'insieme di punti:

$T = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = (2 + \cos b) \cos a, x_2 = (2 + \cos b) \sin a, x_3 = \sin b, \text{ con } a, b \in [0, 2\pi]\}$.

Un *meridiano* di T è una curva $\alpha = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = (2 + \cos b) \cos k_1, x_2 = (2 + \cos b) \sin k_1, x_3 = \sin b, \text{ con } b \in [0, 2\pi]\}$, dove $k_1 \in [0, 2\pi]$ è fissato.

Un *parallelo* di T è una curva $\beta = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = (2 + \cos k_2) \cos a, x_2 = (2 + \cos k_2) \sin a, x_3 = \sin k_2, \text{ con } a \in [0, 2\pi]\}$, dove $k_2 \in [0, 2\pi]$ è fissato.

Ricordiamo che la somma connessa di due varietà topologiche n -dimensionali M e N si ottiene rimuovendo una n -palla aperta da M ed una da N , e, suc-

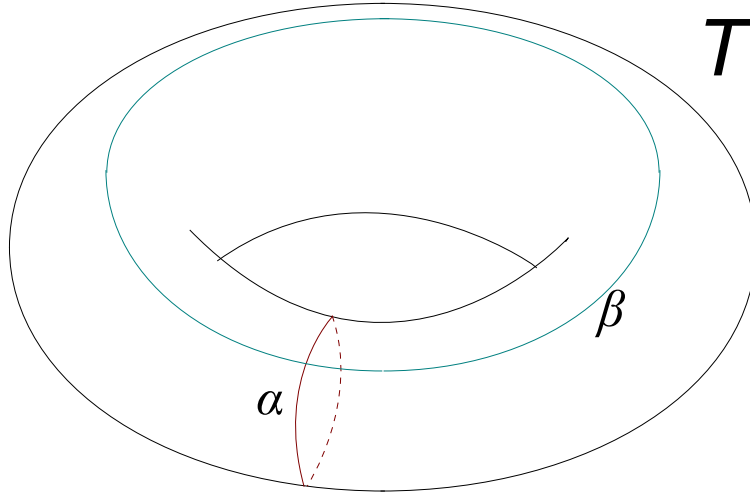


Figura 1: La curva α è un meridiano del toro T , mentre β è un parallelo.

cessivamente, incollando le due varietà così ottenute, tramite i loro nuovi bordi sferici.

Definizione 1.0.2. La *sfera con g manici* T_g è la somma connessa di g tori, cioè una superficie chiusa, connessa e orientabile di genere g .

Poiché T_g è somma connessa di tori, anche su T_g abbiamo dei meridiani e dei paralleli, che sono definiti a partire da quelli del toro. Consideriamo il modello standard di sfera a g manici, cioè l'immersione canonica in \mathbb{R}^3 (vedi Figura 2) di una sfera con g manici T_g .

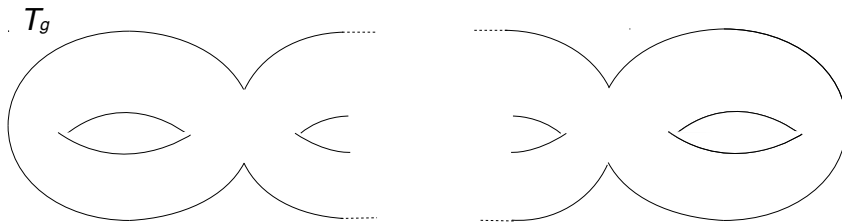


Figura 2: Sfera con g manici.

Definizione 1.0.3. Un *corpo con g manici* H_g è la varietà compatta in \mathbb{R}^3 , il cui bordo è T_g .

In Figura 3 è disegnato un corpo con 3 manici. Notiamo che un meridiano di T_g è caratterizzato dal fatto di bordare un disco in H_g , detto *disco meridiano*.

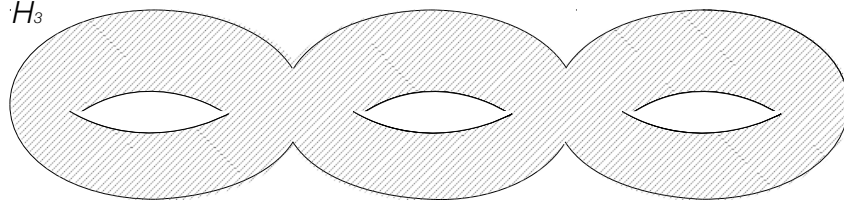


Figura 3: Corpo con 3 manici.

Enunciamo un risultato che utilizzeremo nel prossimo capitolo.

Definizione 1.0.4. Un *i -manico* è la varietà prodotto $H^i := B^i \times B^{3-i}$.

Definizione 1.0.5. Per induzione su $k \geq 0$, definiamo una 3-varietà, eventualmente con bordo, $\mathcal{H}(H^3, \tau_{\lambda_1}, \dots, \tau_{\lambda_k})$:

- se $k = 0$, $\mathcal{H}(H^3, \emptyset)$ è diffeomorfa a H^3 ;
- altrimenti $\mathcal{H}(H^3, \tau_{\lambda_1}, \dots, \tau_{\lambda_k})$ è ottenuta incollando a $\partial\mathcal{H}(H^3, \tau_{\lambda_1}, \dots, \tau_{\lambda_{k-1}})$ un λ_k -manico H^{λ_k} lungo $\partial B^{\lambda_k} \times B^{3-\lambda_k}$, tramite l'immersione liscia

$$\tau_{\lambda_k}|_{\partial B^{\lambda_k} \times B^{3-\lambda_k}} : \partial B^{\lambda_k} \times B^{3-\lambda_k} \rightarrow \partial\mathcal{H}(H^3, \tau_{\lambda_1}, \dots, \tau_{\lambda_{k-1}}).$$

Definizione 1.0.6. Se una 3-varietà M è diffeomorfa a una varietà tridimensionale $\mathcal{H}(H^3, \tau_{\lambda_1}, \dots, \tau_{\lambda_k})$, diciamo che $\mathcal{H}(H^3, \tau_{\lambda_1}, \dots, \tau_{\lambda_k})$ è una *decomposizione in manici* di M .

Utilizzando la teoria di Morse si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema 1.0.7. [Mil63] Ogni 3-varietà chiusa e connessa M ammette una decomposizione in manici.

1.1 Spezzamenti di Heegaard

Prendiamo due copie, H_g^1 e H_g^2 , di H_g e orientiamole. Sia $f : \partial H_g^1 \rightarrow \partial H_g^2$ un omeomorfismo arbitrario che rovescia l'orientazione. Consideriamo $H_g^1 \sqcup H_g^2$ e identifichiamo ogni punto $x \in \partial H_g^1$ con il punto $f(x) \in \partial H_g^2$. Lo spazio topologico $M := H_g^1 \cup_f H_g^2$ ottenuto in tal modo è una 3-varietà senza bordo. Infatti, un intorno del punto $x = f(x) \in M$, è ottenuto incollando due semipalle di dimensione 3, che sono intorni di x e di $f(x)$, rispettivamente in H_g^1 e in H_g^2 .

Definizione 1.1.1. Uno *spezzamento di Heegaard* di genere g di una 3-varietà M è una presentazione di M come $H_g^1 \cup_f H_g^2$, dove $f : \partial H_g^1 \rightarrow \partial H_g^2$ è un omeomorfismo che rovescia l'orientazione. In questo caso diremo che g è il *genere* della presentazione.

Notiamo che una 3-varietà può ammettere presentazioni distinte $H_g^1 \cup_f H_g^2$ e $H_{g'}^1 \cup_{f'} H_{g'}^2$, dove $g \neq g'$.

Esempio 1.1.2. La sfera S^3 ammette una presentazione di genere $g = 0$ ottenuta incollando i bordi di due palle B^3 . Inoltre S^3 ha una presentazione di genere 1 (vedi Esempio 1.2.12).

Triangolando in modo opportuno una data 3-varietà, si può dimostrare il risultato che segue.

Teorema 1.1.3. [PS97] Ogni 3-varietà chiusa, connessa e orientabile ammette uno spezzamento di Heegaard.

Dunque, ogni 3-varietà è descritta mediante un omeomorfismo tra due sfere con g manici. Vogliamo quindi trovare un modo semplice di presentare tale omeomorfismo.

Ad uno spezzamento di Heegaard $H_g^1 \cup_f H_g^2$ di una 3-varietà M possiamo associare due sistemi di curve nel modello standard di sfera con g manici T_g . Consideriamo le immersioni canoniche di H_g^1 e H_g^2 in \mathbb{R}^3 . Su ∂H_g^1 e ∂H_g^2 , abbiamo i meridiani u_1, \dots, u_g e v_1, \dots, v_g disegnati in Figura 4.

Possiamo presentare l'omeomorfismo di incollamento $f : \partial H_g^1 \rightarrow \partial H_g^2$ come $f = f_2^{-1} \circ f_1$, dove f_1 e f_2 sono due omeomorfismi $f_1 : \partial H_g^1 \rightarrow T_g$ e $f_2 : \partial H_g^2 \rightarrow T_g$.

Definizione 1.1.4. Chiamiamo *diagramma di Heegaard* della varietà tridimensionale $H_g^1 \cup_f H_g^2$, il diagramma costituito dai due sistemi di curve $\{f_1(u_i); i = 1, \dots, g\}$ e $\{f_2(v_i); i = 1, \dots, g\}$ in T_g .

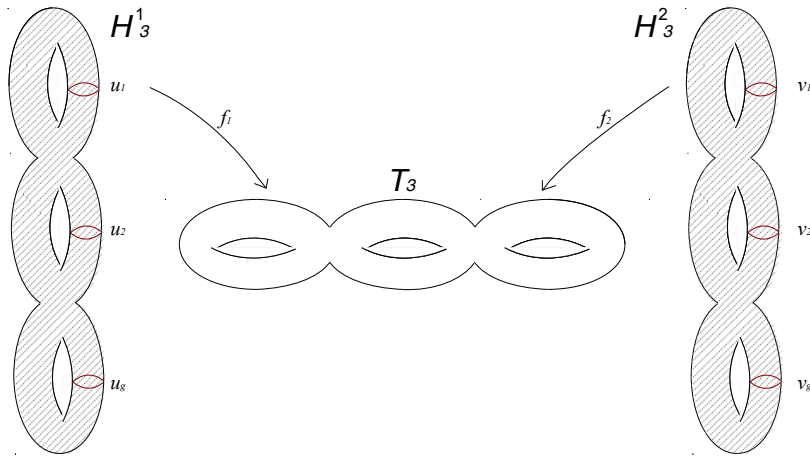


Figura 4: Sistema canonico di meridiani.

Quindi un diagramma di Heegaard è formato da due sistemi di g curve chiuse, semplici e connesse in T_g , ciascuno dei quali:

- è costituito da curve disgiunte;
- è costituito da curve che generano un sottospazio g -dimensionale di $H_1(T_g; \mathbb{R})$.

Si può dimostrare che ogni diagramma di Heegaard individua un omeomorfismo tra ∂H_g^1 e ∂H_g^2 e quindi descrive una 3-varietà. In particolare, ad ogni diagramma di Heegaard corrisponde un'unica 3-varietà, a meno di omeomorfismo. Cioè vale il seguente teorema.

Teorema 1.1.5. [PS97] Se due varietà M e M' ammettono uno stesso diagramma di Heegaard, allora sono omeomorfe.

Indicheremo con $H_g^1 \cup_{\mathbf{c}, \mathbf{d}} H_g^2$ la 3-varietà individuata da un diagramma di Heegaard costituito dai sistemi di curve $\mathbf{c} = \{c_1, \dots, c_g\}$ e $\mathbf{d} = \{d_1, \dots, d_g\}$. Per i nostri scopi utilizzeremo sistemi con più di g curve, quindi diamo la seguente definizione.

Definizione 1.1.6. Un insieme di *attaching circles* $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_l\}$ per T_g è un insieme di l curve chiuse, semplici e connesse in T_g , avente le seguenti proprietà:

- le curve γ_i sono disgiunte;

- $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ generano un sottospazio g -dimensionale di $H_1(T_g; \mathbb{R})$.

In generale $l \geq g$, ma se l'insieme di attaching circles contiene esattamente g curve, diciamo che esso è *ridotto*.

Chiaramente, da un insieme di attaching circles possiamo estrarne un sottoinsieme ridotto.

Definizione 1.1.7. Un *diagramma di Heegaard esteso* è formato da due insiemi $\mathbf{c} = \{c_1, \dots, c_l\}$ e $\mathbf{d} = \{d_1, \dots, d_l\}$ di $l > g$ attaching circles per T_g .

1.2 Spazi lenticolari

Siano $0 \leq q < p$ due numeri interi coprimi. In questa sezione illustriamo due modi equivalenti per definire gli spazi lenticolari $L(p, q)$.

1.2.1 Rappresentazione di $L(p, q)$ come quoziente di S^3

Pensiamo ad S^3 come alla sfera unitaria in \mathbb{C}^2 e sia $\sigma : S^3 \rightarrow S^3$ la mappa:

$$\sigma(z, w) = (\exp(\frac{2\pi i}{p})z, \exp(\frac{2\pi i q}{p})w).$$

Il gruppo $G_{p,q}$, generato dall'omeomorfismo σ , è isomorfo a \mathbb{Z}_p . Consideriamo l'azione su S^3 del gruppo $G_{p,q}$. Tale azione è propriamente discontinua e senza punti fissi, dunque $S^3/G_{p,q}$ è una 3-varietà.

Definizione 1.2.1. Definiamo lo *spazio lenticolare* $L(p, q) := S^3/G_{p,q}$.

Esempio 1.2.2. Abbiamo che $S^3 = L(1, 0)$. Infatti, $L(1, 0)$ è ottenuto quozientando S^3 con l'azione del gruppo $G_{1,0} = \{id\}$.

Esempio 1.2.3. Anche lo spazio proiettivo è uno spazio lenticolare, poiché $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) = L(2, 1)$. Infatti, agire su S^3 tramite $G_{2,1}$, corrisponde a quozientare S^3 con la mappa antipodale.

1.2.2 Proprietà degli spazi lenticolari

La sfera S^3 è semplicemente connessa, dunque il gruppo fondamentale di $L(p, q)$ è isomorfo a \mathbb{Z}_p . Per quanto appena detto, se $L(p, q) \cong L(p', q')$, necessariamente $p = p'$.

Proposizione 1.2.4. [Ale19]

- $H_i(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}$ se $i = 0, 3$.
- $H_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}_p$.
- $H_i(L(p, q)) = 0$ se $i \neq 0, 1, 3$.

Osservazione 1.2.5. Poiché $H_3(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}$, gli spazi lenticolari sono orientabili.

Definizione 1.2.6. Una *sfera di omologia razionale* è una varietà i cui gruppi di omologia a coefficienti razionali coincidono con quelli della sfera.

Osservazione 1.2.7. Gli spazi lenticolari sono sfere di omologia razionale.

Infatti, se $i \neq 1$, abbiamo $H_i(L(p, q)) \cong H_i(S^3)$, altrimenti:

$$H_1(L(p, q); \mathbb{Q}) \cong H_1(L(p, q)) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Q} = 0 = H_1(S^3; \mathbb{Q}).$$

Gli spazi lenticolari, a meno di omeomorfismo, sono stati completamente classificati da Reidemeister nel 1935.

Proposizione 1.2.8. [Rei35] Due spazi lenticolari $L(p, q)$ e $L(p, q')$ sono omeomorfi se e solo se $q \equiv \pm q'^{\pm 1} \pmod{p}$.

Inoltre possiamo stabilire l'equivalenza di spazi lenticolari a meno di omotopia.

Proposizione 1.2.9. [Whi41] Due spazi lenticolari $L(p, q)$ e $L(p, q')$ sono omotopicamente equivalenti se e solo se $qq' \equiv \pm n^2 \pmod{p}$, con $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 1.2.10. Gli spazi $L(7, 1)$ e $L(7, 2)$ sono omotopicamente equivalenti, ma non sono omeomorfi. Gli spazi $L(5, 1)$ e $L(5, 2)$, invece, non sono omotopicamente equivalenti.

1.2.3 Rappresentazione di $L(p, q)$ tramite spezzamento di Heegaard

Sia T un toro, α un suo meridiano orientato e β un suo parallelo orientato. Indichiamo con $q\alpha + p\beta$, una curva chiusa su T che sia omologa alla curva che gira q volte attorno ad α e p volte attorno a β .

Proposizione 1.2.11. [PS97] Abbiamo che $L(p, q) = H_1^1 \cup_{f_{p,q}} H_1^2$, dove l'omeomorfismo $f_{p,q}$ è descritto dal diagramma di Heegaard di genere 1, individuato dalle curve α e $q\alpha + p\beta$.

Esempio 1.2.12. In Figura 5 mostriamo uno spezzamento di Heegaard di genere 1 per $S^3 = L(1, 0)$.

Esempio 1.2.13. In Figura 6 mostriamo uno spezzamento di Heegaard di genere 1 per $L(2, 1)$.

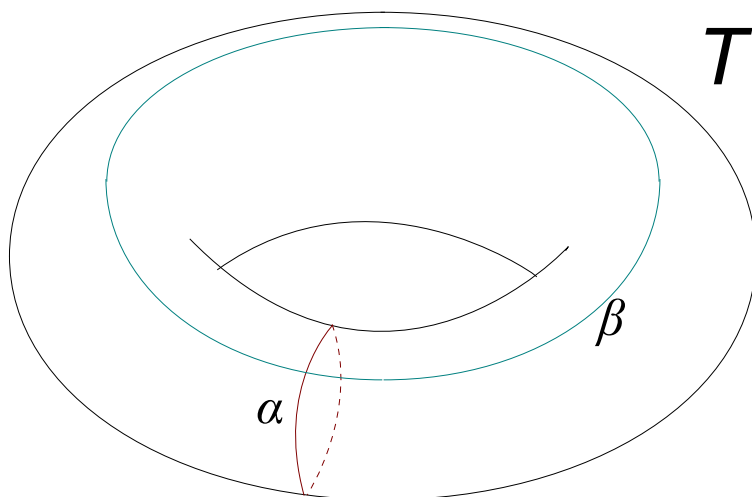


Figura 5: Diagramma di Heegaard di S^3 .

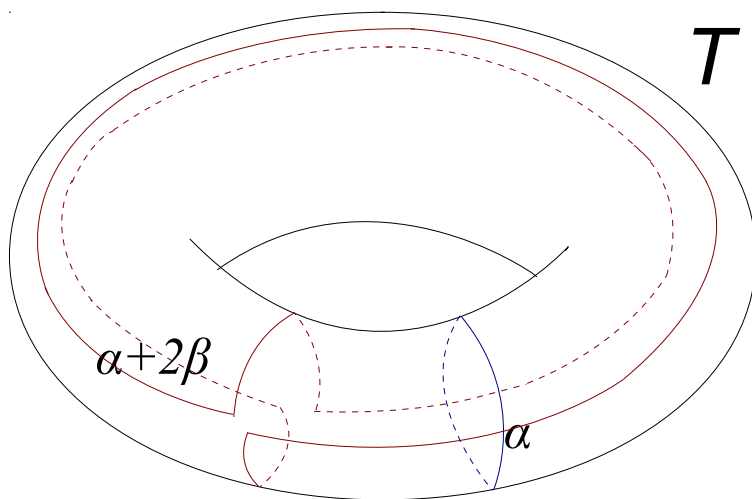


Figura 6: Diagramma di Heegaard di $L(2,1)$.

1.3 Nodi e link

Definizione 1.3.1. Un *link* in una varietà chiusa M è una coppia (M, L) , dove L è una sottovarietà di M diffeomorfa all'unione disgiunta di $l \geq 1$ copie di S^1 . Una *componente* di (M, L) è una delle l componenti connesse del link. Un *nodo* è un link ad una componente. Se L è una sottovarietà orientata useremo la notazione (M, \vec{L}) .

Definizione 1.3.2. Due link L_0 e L_1 sono *equivalenti* se esiste una famiglia a un parametro, $f_t : M \rightarrow M$, con $t \in [0, 1]$, di diffeomorfismi che dipende in modo liscio da t (cioè la mappa $F : M \times [0, 1] \rightarrow M$ data da $(x, t) \mapsto f_t(x)$ è differenziabile) e tale che f_0 è l'identità e $f_1(L_0) = L_1$. La famiglia di diffeomorfismi f_t è un' *isotopia* tra i link L_0 e L_1 e per questo motivo link equivalenti sono detti *isotopi*.

Una volta stabilito in quale varietà M lavoriamo, possiamo indicare un link con L , invece che con (M, L) .

Osservazione 1.3.3. Ogni link L in S^3 può essere rappresentato nello spazio tridimensionale \mathbb{R}^3 . Questo è vero, in quanto possiamo descrivere S^3 come la compattificazione uno-punto di \mathbb{R}^3 e perchè non è restrittivo supporre che L non contenga il punto all'infinito.

Esempio 1.3.4. Il nodo più semplice è il *nodo banale*, cioè quello che borda un disco B^2 (vedi Figura 7). Il *link banale* a l componenti è definito come bordo di l dischi disgiunti.

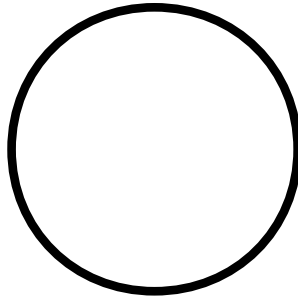


Figura 7: Nodo banale.

Esempio 1.3.5. Il *nodo trifoglio* e il *link di Hopf* (vedi Figura 8) sono tra i più semplici esempi di link non banali ed hanno rispettivamente una e due componenti.

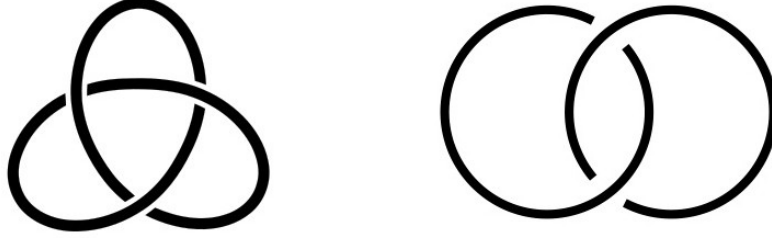


Figura 8: Nodo trifoglio e link di Hopf.

1.3.1 Omologia

Nello studio della teoria dei nodi si è sin da subito cercato di definire quantità che siano invarianti per classi di equivalenza di un nodo. L'omologia di un link ne è un esempio.

Sia K un nodo in $L(p, q)$ e sia $\varphi : S^1 \times B^2 \rightarrow L(p, q)$ una funzione che ristretta all'immagine sia un omeomorfismo e tale per cui $\varphi(S^1 \times \{(0, 0)\}) = K$. Con $V(K)$ indichiamo un *intorno tubolare* di K , cioè l'immagine di φ . In modo simile, possiamo definire un intorno tubolare $V(L)$ di un link L , avendo cura che gli intorni tubolari delle componenti del link siano a due a due disgiunti. Diremo che $C = \overline{L(p, q)} - V(L)$ è il *complementare* di L .

Definizione 1.3.6. Il gruppo di omologia $H_i(C)$, che d'ora in poi indicheremo con $H_i(L)$, è detto *i-esimo gruppo di omologia di L* .

Proposizione 1.3.7. [Rol76] Sia $L \subset S^3$ un link con l componenti. Allora $H_1(L) \cong \mathbb{Z}^l$, mentre $H_i(L) = 0$ se $i \geq 2$.

Proposizione 1.3.8. [CMM13] Sia $L \subset L(p, q)$ un link e siano L_1, \dots, L_l le sue componenti. Per ogni $j = 1, \dots, l$, sia $\delta_j = [L_j] \in \mathbb{Z}_p \cong H_1(L(p, q))$. Allora

$$H_1(L) \cong \mathbb{Z}^l \oplus \mathbb{Z}_d,$$

dove $d = \text{MCD}(\delta_1, \dots, \delta_l, p)$.

1.4 Link Floer Homology

La *Link Floer Homology* (*HFL*), di cui esistono diverse versioni, è un invariante della teoria dei nodi. Anche se può essere definita in un contesto più generale (vedi [OS04.1] e [Ras03]), in questo capitolo ci limiteremo a considerare *HFL* solo per link orientati in sfere razionali di omologia (e quindi anche in spazi lenticolari). In particolare, ci occuperemo soltanto di \widehat{HFL} , cioè della versione *hat* della Link Floer Homology. Precisiamo che per la comprensione dei capitoli successivi, la lettura di questa sezione è utile, ma non necessaria.

Definizione 1.4.1. Un *diagramma di Heegaard di genere g a $2k$ punti*, con $k > 0$, è una quintupla $(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z})$, dove:

- $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{g+k-1}\}$ è un insieme di $g + k - 1$ attaching circles;
- $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_{g+k-1}\}$ è un insieme di $g + k - 1$ attaching circles;
- $\mathbf{w} = \{w_1, \dots, w_k\}$ è un insieme di k punti distinti con la proprietà che $\mathbf{w} \subset T_g \setminus (\alpha \cup \beta)$;
- $\mathbf{z} = \{z_1, \dots, z_k\}$ è un insieme di k punti distinti con la proprietà che $\mathbf{z} \subset T_g \setminus (\alpha \cup \beta)$;
- indicando con $\{A_i\}_{i=1}^k$ le componenti connesse di $T_g - \alpha_1 - \dots - \alpha_k$ e con $\{B_i\}_{i=1}^k$ le componenti connesse di $T_g - \beta_1 - \dots - \beta_k$, i punti base \mathbf{w} e \mathbf{z} sono posizionati in modo che ogni componente A_i ed ogni componente B_i contenga esattamente un elemento di \mathbf{w} ed un elemento di \mathbf{z} .

Denotiamo con H_α (rispettivamente con H_β) il corpo con g manici che ha T_g come bordo e in cui ciascuna curva di α (rispettivamente di β) borda un disco.

Osservazione 1.4.2. La tripla (T_g, α, β) individua un diagramma di Heegaard *esteso*, cioè con un insieme eventualmente sovrabbondante di attaching circles, e quindi determina una varietà tridimensionale $M = H_\alpha \cup_{\alpha, \beta} H_\beta$ (vedi Sezione 1.1).

Consideriamo una quintupla $(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z})$, che individua una sfera razionale di omologia $M = H_\alpha \cup_{\alpha, \beta} H_\beta$. Collegando i punti di \mathbf{w} e di \mathbf{z} , ad ogni quintupla $(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z})$ possiamo associare un link orientato. Per farlo in maniera univoca, rinumeriamo opportunamente gli indici degli elementi di \mathbf{w} e di \mathbf{z} in modo che $w_i, z_i \in A_i$. A questo punto, rinumeriamo le componenti

B_i , in modo che $w_i \in B_i$. In tal modo, avremo che per una certa permutazione $\sigma \in S_k$, vale che $z_{\sigma(i)} \in B_i$. I punti base determinano univocamente un link in $M = H_\alpha \cup_{\alpha, \beta} H_\beta$ nel modo seguente: sia ξ_i un arco orientato in A_i che collega z_i a w_i e sia η_i un arco orientato in B_i che collega w_i a $z_{\sigma(i)}$, per $i = 1, \dots, k$. Indichiamo con $\tilde{\xi}_i \subset H_\alpha$ l'arco ottenuto "spingendo" in H_α la parte interna di ξ_i e indichiamo con $\tilde{\eta}_i \subset H_\beta$ l'arco ottenuto "spingendo" in H_β la parte interna di η_i .

Questa procedura origina un link orientato $\vec{L} \subset M$ ottenuto dall'unione:

$$\bigcup_{i=1}^k (\tilde{\xi}_i \cup \tilde{\eta}_i).$$

In Figura 9 è mostrato il caso del link di Hopf, le cui due componenti sono disegnate, rispettivamente, in blu e in verde. Osserviamo che se \vec{L} ha l componenti, la permutazione σ è prodotto di l cicli disgiunti $\sigma_1, \dots, \sigma_l$. Dunque, una quintupla determina univocamente un link orientato.

Definizione 1.4.3. Diremo che il link $\vec{L} \subset M$ e la quintupla $(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z})$ definiti come sopra sono compatibili.

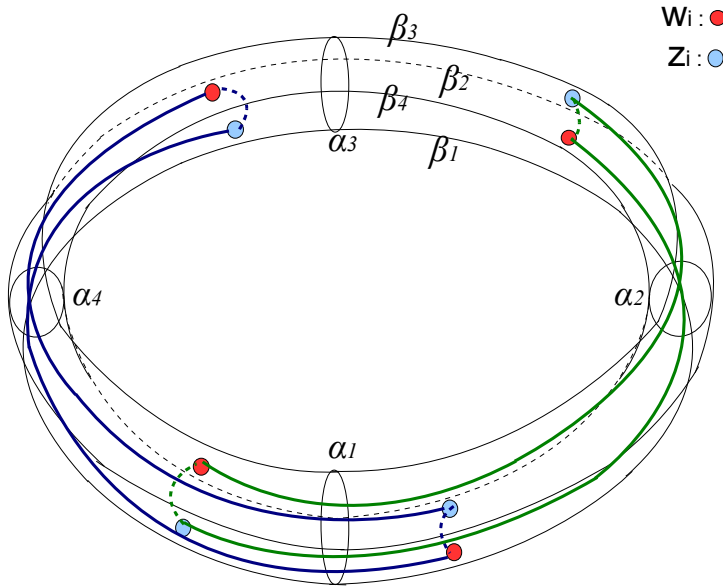


Figura 9: Quintupla $(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z})$ compatibile con il link di Hopf in S^3 .

Osservazione 1.4.4. Si può dimostrare (vedi [OS05]) che, dato un link \vec{L} , esiste sempre una quintupla con esso compatibile.

Consideriamo una quintupla $(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z})$ compatibile con un link orientato \vec{L} .

Sia $T_g \times \dots \times T_g$ il prodotto cartesiano di $g + k - 1$ copie di T_g e sia S_{g+k-1} il gruppo delle permutazioni in $g + k - 1$ lettere. Il gruppo simmetrico S_{g+k-1} agisce su $T_g \times \dots \times T_g$ permutando le componenti delle $(g + k - 1)$ -uple di punti.

Definizione 1.4.5. Definiamo il *prodotto simmetrico* come segue:

$$Sym^{g+k-1}(T_g) := (T_g \times \dots \times T_g) / S_{g+k-1}.$$

La varietà $Sym^{g+k-1}(T_g)$ è dunque costituita dalle $(g + k - 1)$ -uple non ordinate di punti in T_g , in cui lo stesso punto può comparire più volte. A partire dagli insiemi α e β possiamo definire una coppia \mathbb{T}_α e \mathbb{T}_β di tori $(g + k - 1)$ -dimensionali, che sono sottovarietà di $Sym^{g+k-1}(T_g)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_\alpha &:= \{ \{x_1, \dots, x_{g+k-1}\} \mid x_i \in \alpha_i \text{ per } i = 1, \dots, g+k-1 \}, \\ \mathbb{T}_\beta &:= \{ \{x_1, \dots, x_{g+k-1}\} \mid x_i \in \beta_i \text{ per } i = 1, \dots, g+k-1 \}. \end{aligned}$$

Sia B^2 il disco unitario in \mathbb{C} e siano e_1 ed e_2 gli archi del bordo di B^2 , aventi, rispettivamente, coordinate con parte reale positiva e con parte reale negativa.

Definizione 1.4.6. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$. Un *disco di Whitney* che collega \mathbf{x} a \mathbf{y} è una mappa continua:

$$u : B^2 \rightarrow Sym^{g+k-1}(T_g)$$

tale che $u(i) = \mathbf{x}$, $u(-i) = \mathbf{y}$, $u(e_1) \subset \mathbb{T}_\alpha$ e $u(e_2) \subset \mathbb{T}_\beta$.

Indichiamo con $\Pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ l'insieme delle classi di omotopia dei dischi di Whitney che collegano \mathbf{x} a \mathbf{y} .

Osservando che una struttura complessa su T_g induce una struttura complessa su $Sym^{g+k-1}(T_g)$ e facendo riferimento a [OS06] per ulteriori precisazioni, possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 1.4.7. Sia $\phi \in \Pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Indichiamo con $\mathcal{M}(\phi)$ lo *spazio dei moduli* costituito dai rappresentanti pseudo-olomorfi di ϕ . Indichiamo con $\mu(\phi)$ l'*indice di Maslov*, cioè la dimensione formale di $\mathcal{M}(\phi)$.

Osservazione 1.4.8. [OS06] Vi è un'azione di \mathbb{R} su $\mathcal{M}(\phi)$. Tale azione corrisponde a quella degli automorfismi complessi del disco unitario che fissano i e $-i$. Il gruppo dei siffatti automorfismi è isomorfo a \mathbb{R} . Infatti, per il teorema della mappa di Riemann, possiamo passare dal disco unitario alla striscia $[0, 1] \times i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. A questo punto notiamo che gli automorfismi complessi del disco che fissano i e $-i$ corrispondono agli automorfismi della striscia che preservano $0 \times i\mathbb{R}$ e $1 \times i\mathbb{R}$, cioè alle traslazioni verticali.

Per definire la Link Floer Homology è necessario definire un complesso di catene. Vediamo come.

Teorema 1.4.9. [OS04.2] Se $\mu(\phi) = 1$, l'insieme $\frac{\mathcal{M}(\phi)}{\mathbb{R}}$ è una varietà compatta 0-dimensionale.

Denotiamo con $n_p(\phi)$ la molteplicità locale di ϕ nel punto $p \in T_g$, cioè il numero algebrico di intersezioni dell'immagine di un rappresentante di ϕ con la sottovarietà $(\{p\} \times T_g \times \dots \times T_g)/S_{g+k-1}$. Indichiamo con $\#_2(S)$ la cardinalità modulo 2 di un insieme S . Le considerazioni che faremo d'ora in poi, se non specificato altrimenti, sono valide per link in sfere razionali di omologia.

Sia \vec{K} un nodo e sia $(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z})$ una quintupla a $2k$ punti con esso compatibile.

Definizione 1.4.10. Denotiamo con $C(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z})$ lo \mathbb{Z}_2 -spazio vettoriale di cui gli elementi $\mathbf{x} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ formano una base e definiamo l'applicazione lineare $\partial : C(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z}) \rightarrow C(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z})$:

$$\partial \mathbf{x} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta} \left(\sum_{\left\{ \begin{array}{l} \phi \in \Pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mu(\phi) = 1, \\ n_{w_i}(\phi) = n_{z_i}(\phi) = 0 \ \forall i = 1, \dots, k \end{array} \right\}} \#_2 \left(\frac{\mathcal{M}(\phi)}{\mathbb{R}} \right) \mathbf{y} \right).$$

Proposizione 1.4.11. [OS04.2] Vale $\partial^2 = 0$, dunque $(C(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z}), \partial)$ è un complesso di catene.

Ora estendiamo la definizione al caso di un link. Sia \vec{L} un link orientato e sia $(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z})$ una quintupla a $2k$ punti con esso compatibile. Rinumeriamo i punti base in modo di tener conto della componente del link a cui appartengono. Per $j = 1, \dots, l$ denotiamo con $2k_j$ il numero di punti base appartenenti alla j -esima componente di \vec{L} . Sia S l'insieme delle coppie (j, i) , dove $j = 1, \dots, l$ e $i = 1, \dots, k_j$. Abbiamo dunque i punti base $\{z_{j,i}\}_{(j,i) \in S}$ e $\{w_{j,i}\}_{(j,i) \in S}$. Similmente al caso di un nodo, possiamo definire il complesso di catene $(C(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z}), \partial)$.

Definizione 1.4.12. Denotiamo con $C(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z})$ lo \mathbb{Z}_2 -spazio vettoriale di cui gli elementi $\mathbf{x} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ formano una base. L'operatore di bordo ∂ è definito come segue:

$$\partial \mathbf{x} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta} \left(\sum_{\left\{ \begin{array}{l} \phi \in \Pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mu(\phi) = 1, \\ n_{w_{j,i}}(\phi) = n_{z_{j,i}}(\phi) = 0 \quad \forall (j, i) \in S \end{array} \right\}} \#_2 \left(\frac{\mathcal{M}(\phi)}{\mathbb{R}} \right) \mathbf{y} \right).$$

Proposizione 1.4.13. [OS04.2] Vale $\partial^2 = 0$, dunque $(C(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z}), \partial)$ è un complesso di catene.

Ad ogni generatore di $C(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z})$ possiamo associare tre distinte gradazioni: quella di spin, quella di Maslov e quella di Alexander (vedi [BGH08]).

Data una sfera razionale d'omologia M , spieghiamo brevemente come è definito lo spazio $Spin^c(M)$, da cui dipende la gradazione di spin. Osserviamo che M ha caratteristica di Eulero nulla, dunque su di essa si possono definire dei campi vettoriali ovunque non nulli.

Definizione 1.4.14. Siano v_1 e v_2 due campi vettoriali ovunque non nulli. Diciamo che v_1 e v_2 sono *omologhi* se esiste una palla $B^3 \subset M$ con la proprietà che $v_1|_{M-B^3}$ è omotopo a $v_2|_{M-B^3}$. Lo spazio $Spin^c(M)$ delle strutture di spin su M è definito come l'insieme delle classi di omologia dei campi vettoriali ovunque non nulli su M .

Proposizione 1.4.15. [OS06] Lo spazio $Spin^c(M)$ ha la stessa cardinalità di $H^2(S^3, \mathbb{Z})$.

Il *grado di spin* è una funzione che può essere definita associando, ad ogni elemento di $Spin^c(M)$, un numero intero.

Ora limitiamoci a considerare il caso di link in S^3 .

In questo caso la gradazione di spin non è significativa, in quanto può assumere un unico valore (per la proposizione precedente), dunque descriviamo solo le altre due gradazioni.

Definizione 1.4.16. Sia $\phi \in \Pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Il *grado di Maslov relativo* tra due generatori \mathbf{x} e \mathbf{y} è definito dalla formula:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}(\mathbf{y}) = \mu(\phi) - 2 \sum_{i=1}^k n_{w_i}(\phi). \quad (1.1)$$

Si può dimostrare che, scelti \mathbf{x} e \mathbf{y} , il secondo membro dell'equazione (1.1) non dipende da ϕ (vedi [OS04.1]) e quindi la definizione è ben posta. Il grado di Maslov relativo è definito a meno di una costante additiva, ma tale indeterminazione può essere rimossa, passando da una gradazione relativa (cioè definita per una coppia di generatori), ad una gradazione assoluta (cioè definita su ciascun generatore). Per fare ciò, basta trovare un modo univoco per fissare il grado di un certo generatore e poi dedurre il grado degli altri generatori utilizzando la formula relativa (vedi [MOS06] per dettagli).

Osservazione 1.4.17. Dall'equazione (1.1) segue che $\mathbf{M}(\partial(\mathbf{x})) = \mathbf{M}(\mathbf{x}) - 1$.

Sia \vec{K} un nodo in S^3 e sia $C(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z}, \partial)$ il complesso di catene ad esso associato.

Definizione 1.4.18. Sia $\phi \in \Pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Il *grado di Alexander relativo* tra due generatori \mathbf{x} e \mathbf{y} è definito dalla formula:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^k n_{z_i}(\phi) - \sum_{i=1}^k n_{w_i}(\phi). \quad (1.2)$$

Si può dimostrare che il secondo membro dell'equazione (1.2) non dipende da ϕ (vedi [OS04.1]) e quindi la definizione è ben posta. La gradazione relativa di Alexander può essere sollevata ad una gradazione razionale assoluta [MOS06]. Infatti vi è un unico modo di scegliere la funzione \mathbf{A} in modo che soddisfi l'equazione:

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta} t^{\mathbf{A}(\mathbf{x})} \equiv \Delta_K(t)(1 - t^{-1})^{k-1} \pmod{2},$$

dove K è il nodo compatibile con la quintupla $(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z})$, $\Delta_K(t)$ è il polinomio di Alexander simmetrizzato di K e $2k$ è il numero di punti base.

Osservazione 1.4.19. Dall'equazione (1.2) segue che $\mathbf{A}(\partial(\mathbf{x})) = \mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Consideriamo un link orientato $\vec{L} \subset S^3$ a l componenti. La gradazione di Alexander di un generatore diventa una multigradazione a valori in \mathbb{Q}^l .

Definizione 1.4.20. Il *multigrado di Alexander relativo* tra due generatori \mathbf{x} e \mathbf{y} è definito dalla formula:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{k_1} (n_{z_{1,i}}(\phi) - n_{w_{1,i}}(\phi)), \dots, \sum_{i=1}^{k_l} (n_{z_{l,i}}(\phi) - n_{w_{l,i}}(\phi)) \right).$$

La multigradazione relativa di Alexander può essere sollevata ad una multigradazione razionale assoluta [MOS06]. Inoltre, analogamente al caso dei nodi, l'operatore di bordo preserva il multigrado di Alexander.

Osservazione 1.4.21. [BGH08] Per link in sfere di omologia razionale, le gradazioni di Maslov e di Alexander si comportano, rispetto all'operatore di bordo, come quelle definite nel caso di link in S^3 . Cioè l'operatore di bordo fa diminuire di 1 il grado di Maslov, mentre preserva il multigrado di Alexander. Inoltre il grado di spin è preservato dall'operatore di bordo.

Sia \vec{L} un link orientato a l componenti in una sfera di omologia razionale e sia $(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z})$ una quintupla con esso compatibile. Per $j = 1, \dots, l$, sia V_j uno \mathbb{Z}_2 -spazio vettoriale di dimensione due, avente una base formata da un elemento con bigradazione di Maslov-Alexander $(0, (0, 0, \dots, 0))$ e da un elemento con bigradazione $(-1, -\vec{e}_j)$, dove \vec{e}_j indica il j -esimo vettore della base canonica di \mathbb{R}^l .

Definizione 1.4.22. La Link Floer Homology di \vec{L} , che indicheremo con $\widehat{HFL}(\vec{L})$, è lo \mathbb{Z}_2 -spazio vettoriale tale che:

$$H(C(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z}), \partial) \cong \widehat{HFL}(\vec{L}) \otimes \bigotimes_{j=1}^l V_j^{\otimes (k_j-1)},$$

dove $2k_j$ indica il numero di punti base appartenenti alla j -esima componente di \vec{L} . Denotiamo con $\widehat{HFK}(\vec{K})$, la Knot Floer Homology di un nodo \vec{K} .

Ogni generatore di $\widehat{HFL}(\vec{L})$ è dunque dotato di una gradazione di Maslov e di una multigradazione Alexander. Quindi possiamo scrivere $\widehat{HFL}(\vec{L})$ come somma diretta di gruppi di omologia $\widehat{HFL}_{(j, (i_1, \dots, i_l))}(\vec{L})$:

$$\widehat{HFL}(\vec{L}) = \bigoplus_{(j, (i_1, \dots, i_l)) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}^l} \widehat{HFL}_{(j, (i_1, \dots, i_l))}(\vec{L}),$$

dove j e (i_1, \dots, i_l) indicano rispettivamente i gradi di Maslov e di Alexander del generatore del corrispondente gruppo di omologia.

Di fondamentale importanza è l'invarianza per isotopia di \widehat{HFL} .

Teorema 1.4.23. [OS04.2] Se \vec{L}_1 è equivalente a \vec{L}_2 , allora $\widehat{HFL}(\vec{L}_1) = \widehat{HFL}(\vec{L}_2)$.

Dunque la versione “hat” della Link Floer Homology è un invariante della teoria dei nodi.

Capitolo 2

Grid diagrams

In questo capitolo mostreremo una tecnica basata sugli spezzamenti di Heegaard per rappresentare link nella sfera tridimensionale S^3 e negli spazi lenticolari $L(p, q)$.

2.1 Rappresentazione in S^3

Definizione 2.1.1. Un *grid diagram planare* Γ_P è determinato da una griglia quadrata di $n \times n$ celle in \mathbb{R}^2 e da due insiemi $\mathbb{O} = \{O_0, O_1, \dots, O_{n-1}\}$ e $\mathbb{X} = \{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\}$ costituiti da elementi posizionati seguendo le regole:

- ogni riga della griglia contiene esattamente un elemento di \mathbb{O} ed un elemento di \mathbb{X} ;
- ogni colonna della griglia contiene esattamente un elemento di \mathbb{O} ed un elemento di \mathbb{X} .

Il numero n è detto *grid number* di Γ_P .

Un grid diagram planare così definito può essere messo in posizione standard nel piano facendo coincidere il vertice inferiore sinistro della griglia con l'origine, considerando ogni cella come un quadrato di lato unitario, e assumendo che ogni elemento di \mathbb{O} ed ogni elemento di \mathbb{X} sia posto al centro della rispettiva cella.

Se un elemento di \mathbb{O} ed un elemento di \mathbb{X} giacciono nella stessa riga li colleghiamo tramite un segmento orizzontale, mentre se giacciono nella stessa colonna li colleghiamo tramite un segmento verticale. Convenendo che in caso di incrocio il segmento orizzontale sia il sottopasso mentre quello verticale sia il sovrappasso, possiamo interpretare il diagramma Γ_P come la

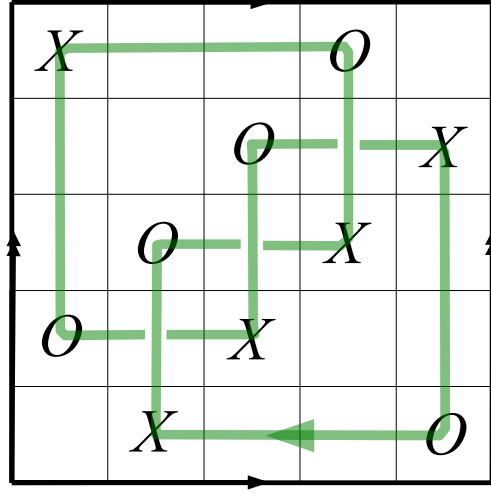


Figura 10: Grid diagram con grid number 5 del nodo trifoglio.

proiezione sul piano di un link L in S^3 (vedi Figura 10). Per convenzione orientiamo il link come segue. Fissata una componente, consideriamo la O e la X appartenenti alla componente e giacenti nella riga inferiore del grid diagram. Colleghiamo la O alla X tramite un segmento orizzontale orientato. Questa scelta determina un'orientazione del link.

Definizione 2.1.2. In questo caso diciamo che Γ_P è una *grid presentation* di \vec{L} .

Osservazione 2.1.3. In seguito (Teorema 2.2.9) mostreremo che ogni classe di isotopia di un link orientato in S^3 può essere rappresentata da un grid diagram.

Definizione 2.1.4. Il numero minimo n per cui un link $\vec{L} \subset S^3$ ammette una grid presentation con grid number n , è detto *arc index* di \vec{L} .

Definizione 2.1.5. Identificando i segmenti opposti del quadrato su cui è costruito il grid diagram planare Γ_P , come in Figura 10, otteniamo un *grid diagram torico* Γ , detto più semplicemente *grid diagram compatibile* con \vec{L} .

Così facendo gli n segmenti orizzontali, rispettivamente verticali, che compongono la griglia diventano n circonferenze orizzontali, rispettivamente verticali, che denoteremo rispettivamente con $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ e con $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$; convenendo di numerare le curve a partire dall'angolo inferiore sinistro della griglia. Infine poniamo $\alpha = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ e $\beta = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$.

2.2 Rappresentazione in $L(p, q)$

In modo simile a quanto visto per S^3 , i grid diagram sono utili anche per descrivere link in spazi lenticolari $L(p, q)$.

Definizione 2.2.1. Sia $q \neq 0$. Un *grid diagram (torico e inclinato)* Γ con grid number n per $L(p, q)$ è descritto da una quintupla $(T, \alpha, \beta, \mathbb{O}, \mathbb{X})$, dove (vedi Figura 11):

- $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ è il toro orientato ottenuto quotizzando \mathbb{R}^2 con il reticolo isomorfo a \mathbb{Z}^2 generato dai vettori $\vec{e}_1 = (1, 0)$ ed $\vec{e}_2 = (0, 1)$;
- per $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, le componenti α_i di $\alpha = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ sono le n immagini in $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ delle rette $y = i/n$. Le porzioni di grid diagram comprese tra le circonferenze orizzontali α_i e α_{i+1} sono le righe del grid diagram;
- per $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, le componenti β_i di $\beta = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ sono le n immagini in $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ delle rette $y = -\frac{p}{q}(x - \frac{i}{pn})$. Le porzioni di grid diagram comprese tra le circonferenze diagonali β_i e β_{i+1} sono le colonne del grid diagram;
- $\mathbb{O} = \{O_0, O_1, \dots, O_{n-1}\}$ è un insieme di n punti in $T - \alpha - \beta$ con la proprietà che due o più punti non possono giacere nella stessa riga o nella stessa colonna;
- $\mathbb{X} = \{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\}$ è un insieme di n punti in $T - \alpha - \beta$ con la proprietà che due o più punti non possono giacere nella stessa riga o nella stessa colonna.

Notiamo che la definizione di grid diagram per link in $S^3 = L(1, 0)$ può essere considerata un adattamento di quella appena data, se consideriamo che, quando $q = 0$, le circonferenze diagonali siano sostituite con circonferenze verticali.

Tramite spezzamento di Heegaard, lo spazio lenticolare $L(p, q)$ può essere individuato dall'unione di due tori solidi H_α e H_β con bordo T in comune. Le n curve chiuse α_i coincidono con n meridiani di H_α , mentre le n curve chiuse β_i coincidono con altrettanti meridiani di H_β .

Similmente al caso di S^3 , ad un grid diagram possiamo associare univocamente un link orientato in $L(p, q)$ (vedi Figura 11):

1. colleghiamo ogni O all'unica X giacente sulla stessa riga, mediante un arco orizzontale disgiunto dalle curve α_k ;

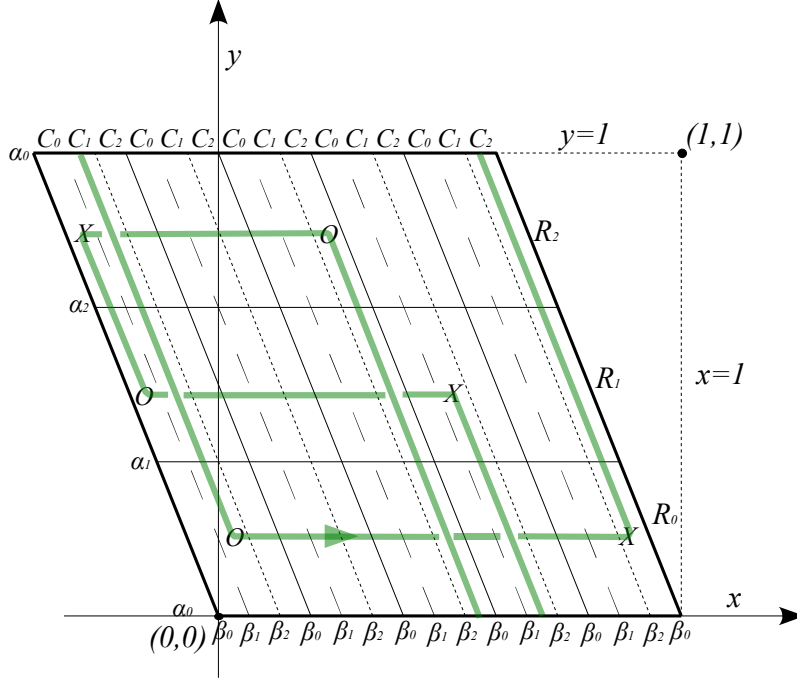


Figura 11: Grid diagram con grid number 3 di un nodo in $L(5, 2)$.

2. colleghiamo ogni O all'unica X giacente sulla stessa colonna, mediante un arco diagonale orientato e disgiunto dalle curve β_k ;
3. consideriamo la curva γ in T formata dall'unione degli archi orizzontali e di quelli diagonali che collegano gli elementi di \mathbb{O} a quelli di \mathbb{X} ;
4. eliminiamo le eventuali autointersezioni di γ "spingendo in H_α " la parte interna degli archi orizzontali e "spingendo in H_β " la parte interna degli archi diagonali;
5. fissata una componente del link così ottenuto, consideriamo la O e la X appartenenti ad essa e giacenti nella riga inferiore del grid diagram. Fatto ciò, colleghiamo la O alla X tramite un segmento orizzontale orientato. Questa scelta determina un'orientazione del link.

Osservazione 2.2.2. Dato un grid diagram, la scelta degli archi orizzontali (rispettivamente diagonali) che collegano le O e le X non è univoca, però scelte differenti danno luogo a link isotopi.

Abbiamo osservato che ad un grid diagram possiamo associare un link orientato. Mostriamo ora che, viceversa, ogni classe di isotopia di un link orientato può essere descritta da un grid diagram.

Sia $H_\alpha \cup_{\alpha, \beta} H_\beta$ lo spezzamento di Heegaard di genere 1 di $L(p, q)$ associato alla quintupla $(T, \alpha, \beta, \mathbb{O}, \mathbb{X})$.

Definiamo una funzione altezza $h : L(p, q) \rightarrow [-\infty, \infty]$ tale che :

- $h^{-1}\{0\} = T$;
- $h^{-1}[-\infty, 0] = H_\alpha$ e $h^{-1}[0, \infty] = H_\beta$;
- $h^{-1}\{-\infty\}$ è la circonferenza nucleo di H_α , cioè è isotopa ad un parallelo di H_α , mentre $h^{-1}\{+\infty\}$ è la circonferenza nucleo di H_β , cioè è isotopa ad un parallelo di H_β .

Se \vec{L} è disgiunto da $h^{-1}\{\pm\infty\}$ allora è contenuto in $h^{-1}(-\infty, +\infty)$, che, pensando a T come a $T \times \{0\}$, può essere identificato con $T \times (-\infty, +\infty)$.

Definizione 2.2.3. Se $\pi(\vec{L})$, cioè l'immagine di \vec{L} tramite la proiezione $\pi : T \times (-\infty, +\infty) \rightarrow T \times \{0\}$, ha un numero finito di punti doppi di autointersezione, diciamo che \vec{L} è in *posizione generale*.

Definizione 2.2.4. Se \vec{L} è in posizione generale, l'immagine $\pi(\vec{L})$ in T , che indicheremo con $D(\vec{L})$, è detta *diagramma* di \vec{L} .

Osservazione 2.2.5. Tramite isotopia, ogni link $\vec{L} \subset L(p, q)$ può essere portato in posizione generale e perciò ammette un diagramma $D(\vec{L})$.

Definizione 2.2.6. Un link \vec{L} in $L(p, q)$ è in *grid position* se:

1. ogni componente di \vec{L} è costituita alternatamente da archi propriamente inclusi in un disco meridiano di H_α e in un disco meridiano di H_β ;
2. due o più archi di \vec{L} non sono contenuti nello stesso disco meridiano.

Ad un link \vec{L} in grid position possiamo associare un grid diagram. Se \vec{L} è unione di n archi in H_α e di n archi in H_β allora n è il grid number della sua presentazione.

Definizione 2.2.7. Chiamando *segmento* un arco orizzontale o diagonale, diremo che una 1-varietà immersa in T è *rettilenea* se è costituita da un numero finito di segmenti orizzontali alternati a segmenti diagonali e non si hanno singolarità agli estremi di ciascun segmento. Conveniamo di considerare rettilinee anche le circonferenze e i singoli punti.

Tramite omotopia, gli archi di un diagramma possono essere approssimati con segmenti PL, alternatamente orizzontali e diagonali. Così facendo si può dimostrare il seguente lemma.

Lemma 2.2.8. [BGH08] Ogni diagramma $D(\vec{L})$ di un link $\vec{L} \subset L(p, q)$ è isotopo a un diagramma rettilineo in cui i sottopassi sono orizzontali.

Dal lemma appena enunciato segue il teorema:

Teorema 2.2.9. *Ogni link orientato \vec{L} in $L(p, q)$ può essere rappresentato da un grid diagram.*

Dimostrazione. Sia \vec{L} un link in $L(p, q)$ e sia $D(\vec{L})$ un suo diagramma sul toro T ottenuto da uno spezzamento di Heegaard di genere 1 di $L(p, q)$. Per il lemma precedente si può assumere che $D(\vec{L})$ sia rettilineo e che i sottopassi siano orizzontali. Se due o più segmenti orizzontali di $D(\vec{L})$ giacciono sulla stessa circonferenza orizzontale α , consideriamo un piccolo intorno aperto di α che non intersechi altri segmenti orizzontali, e, tramite isotopia lungo gli archi diagonali, portiamo ogni segmento orizzontale a giacere su una diversa circonferenza orizzontale. Notiamo che con questo procedimento i segmenti diagonali rimangono sulla stessa circonferenza diagonale cambiando, eventualmente, solo la loro lunghezza. Similmente procediamo per fare in modo che non più di un segmento diagonale giaccia su una circonferenza diagonale β . Effettuando le isotopie descritte, $D(\vec{L})$ diventa un grid diagram compatibile con \vec{L} . \square

Abbiamo quindi mostrato che un link orientato può essere portato in posizione generale rispetto ad una decomposizione di Heegaard di $L(p, q)$, e ad esso si può associare un diagramma e quindi una grid presentation del link. Dunque ogni link in $L(p, q)$ può essere rappresentato da un grid diagram e in particolare questo vale per ogni link in $L(1, 0) = S^3$.

Osservazione 2.2.10. Dalla grid presentation di un link $\vec{L} \subset L(p, q)$ a l componenti possiamo dedurre la classe di omologia $\delta_i = [\vec{L}_i]$ di ciascuna delle sue componenti. Infatti, se, per esempio, indichiamo con I_i il numero di volte in cui L_i “entra” nella base inferiore del parallelogramma e con E_i il numero di volte in cui “esce”, abbiamo:

$$\delta_i = E_i - I_i.$$

Esempio 2.2.11. In Figura 12 sono illustrati due nodi \vec{K}_1 e \vec{K}_2 in $L(5, 2)$. Abbiamo che $[\vec{K}_1] = 1$, mentre $[\vec{K}_2] = 2$.

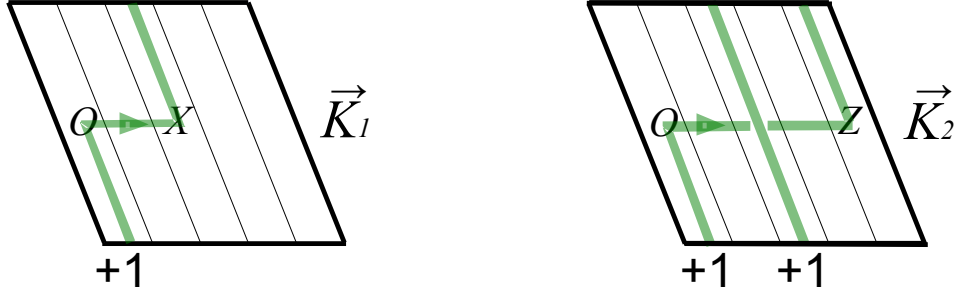


Figura 12: Nodi \vec{K}_1 e \vec{K}_2 in $L(5, 2)$.

2.3 Sollevamento ad S^3

Come abbiamo visto nel capitolo iniziale (vedi Sottosezione 1.2.1), $L(p, q)$ può essere ottenuto quozientando S^3 con la proiezione di rivestimento σ . In questa sezione mostriamo come sollevare il grid diagram $\Gamma = (T, \alpha, \beta, \mathbb{O}, \mathbb{X})$ di un link $\vec{L} \subset L(p, q)$, ad un grid diagram $\tilde{\Gamma} = (\tilde{T}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\mathbb{O}}, \tilde{\mathbb{X}})$ di $\sigma^{-1}(\vec{L}) \subset S^3$.

Consideriamo il rivestimento universale \mathbb{R}^2 di T e identifichiamo T con il dominio fondamentale $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ dell'azione di rivestimento. Sia Z il reticolo a coefficienti interi generato dai vettori $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, p)$ e definiamo $\tilde{T} = \mathbb{R}^2/Z$. Il grid diagram $\tilde{\Gamma}$ è costruito impilando una sopra l'altra p copie del parallelogramma iniziale e traslando, ad ogni passo, le $\tilde{\mathbb{O}}$ e le $\tilde{\mathbb{X}}$ di q colonne verso destra (vedi Figura 13).

Teorema 2.3.1. [BGH08] Consideriamo un link orientato $\vec{L} \subset L(p, q)$ e sia $\Gamma = (T, \alpha, \beta, \mathbb{O}, \mathbb{X})$ una sua grid presentation. Sia $\tilde{\Gamma} = (\tilde{T}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\mathbb{O}}, \tilde{\mathbb{X}})$ il grid diagram in S^3 costruito, come descritto sopra, a partire da Γ . Allora il sollevamento $\sigma^{-1}(\vec{L}) \subset S^3$ ammette grid presentation $\tilde{\Gamma}$.

Dimostrazione. Alla grid presentation Γ di $\vec{L} \subset L(p, q)$ corrisponde una decomposizione di $L(p, q)$ in un corpo con manici $H_{0,1}$ e in un corpo con manici $H_{2,3}$, composti, il primo, da n 0-manici e n 1-manici, mentre il secondo da n 2-manici e da n 3-manici. I due corpi con manici hanno bordo comune $\partial(H_{0,1}) = \partial(-H_{2,3}) = T$. Per costruire un grid diagram per $\sigma^{-1}(\vec{L}) \subset S^3$, costruiamo una decomposizione in manici del rivestimento universale S^3 che sia compatibile con la decomposizione in manici di $L(p, q)$ e con la proiezione di rivestimento.

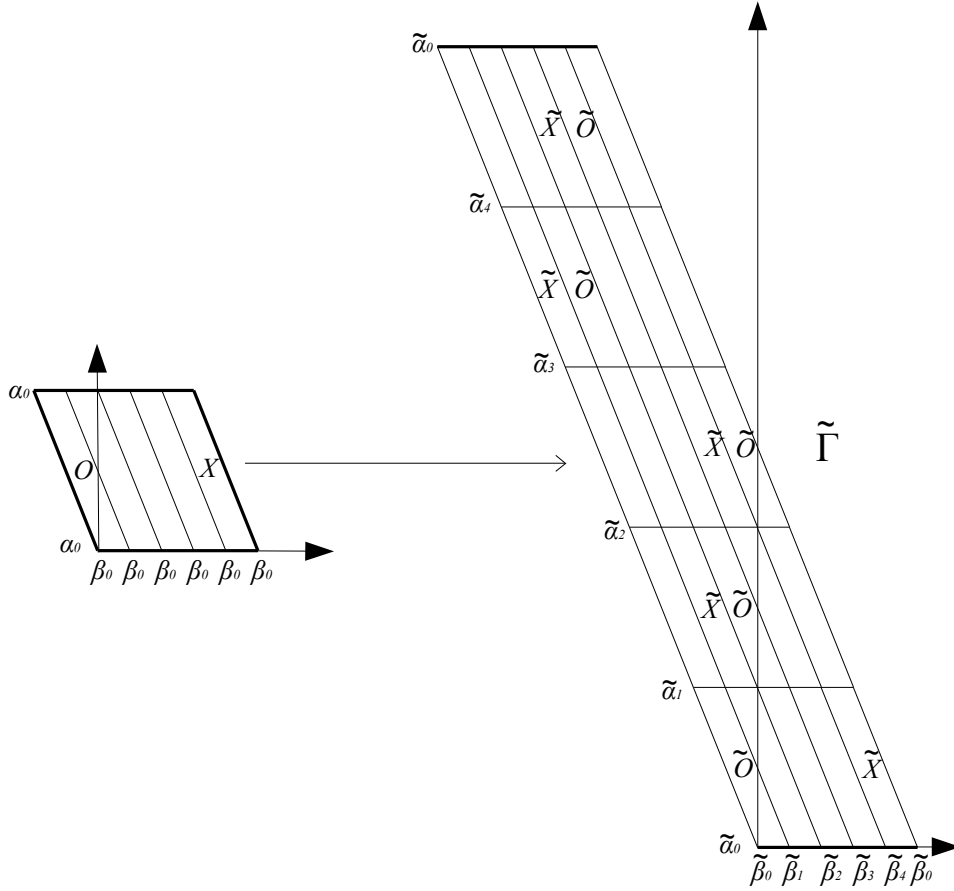


Figura 13: Sollevamento ad S^3 di un nodo con grid number 1 in $L(5, 2)$.

Se h è un manico della decomposizione di $L(p, q)$ e a è un generatore di $\pi_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}_p$, allora $\sigma^{-1}(h) = \{\tilde{h}, a\tilde{h}, a^2\tilde{h}, \dots, a^{p-1}\tilde{h}\}$ è un sottoinsieme dell'insieme dei manici in cui è decomposto S^3 . Le mappe di incollamento per i sollevamenti dei manici sono univocamente determinate dalla condizione che esse commutino con la proiezione di rivestimento. Applicare questa procedura a una decomposizione in manici associata a Γ corrisponde a tagliare $H_{0,1}$ lungo un meridiano, ottenendo quindi $D^2 \times I$, e ad incollare tra loro p copie di $D^2 \times I$. Dal punto di vista del grid diagram fare ciò comporta che p copie del bordo dei manici vengano impilate l'una in cima all'altra, dando perciò origine ad una grid presentation $\tilde{\Gamma} = (\tilde{T}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\mathcal{O}}, \tilde{\mathcal{X}})$ di $\sigma^{-1}(\vec{L})$. \square

Come verificheremo nel Capitolo 4, un link $L \subset L(p, q)$ e il suo sollevamento in S^3 non hanno necessariamente lo stesso numero di componenti. Più precisamente, abbiamo:

Proposizione 2.3.2. [Man13] Se $L \subset L(p, q)$ ha l componenti, allora il numero di componenti di \tilde{L} è $\sum_{i=1, \dots, l} MCD(\delta_i, p)$, dove con δ_i indichiamo la classe di omologia $[\vec{L}_i]$.

Capitolo 3

Descrizione combinatoria della Link Floer Homology

Il calcolo della Link Floer Homology \widehat{HFL} a partire dalla definizione data nel primo capitolo non è affatto agevole e inoltre richiede l'utilizzo di diverse nozioni di geometria симплетica. Però, nel 2008, Baker, Grigsby e Hedden [BGH08] danno una descrizione combinatoria della \widehat{HFL} per nodi in $L(p, q)$. In questo capitolo descriveremo come calcolare la \widehat{HFL} utilizzando tale descrizione, e, in conclusione, faremo alcune osservazioni.

3.1 Descrizione combinatoria della \widehat{HFK} in S^3

Sia \vec{K} un nodo in S^3 e sia $\Gamma = (T, \alpha, \beta, \mathbb{O}, \mathbb{X})$ una sua grid presentation. Seguendo [MOS06], associamo a Γ un complesso di catene $(C(\Gamma), \partial)$, a partire dal quale calcoleremo la Knot Floer Homology $\widehat{HFK}(\vec{K})$.

3.1.1 Generatori

Ricordiamo che α e β sono le famiglie di curve descritte nella Definizione 2.1.5, mentre con R_i e C_i indichiamo, rispettivamente, le righe e le colonne del grid diagram (vedi Figura 14).

Definizione 3.1.1. Un generatore di $(C(\Gamma), \partial)$ è una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi α e β .

Quindi se n è il grid number di Γ , l'insieme Y dei generatori di $(C(\Gamma), \partial)$ è in corrispondenza biunivoca con il gruppo delle permutazioni di n lettere ed ha dunque $n!$ elementi. Un elemento $\mathbf{x} \in Y$ può essere interpretato come una n -upla di punti di intersezione tra le circonferenze orizzontali α_i e quelle

verticali β_j , avente la proprietà che nessun punto d'intersezione appartenga a più di una α_i o di una β_j (vedi Figura 14).

Definizione 3.1.2. Denotiamo con $C(\Gamma)$ lo \mathbb{Z}_2 -spazio vettoriale che ha l'insieme Y come base.

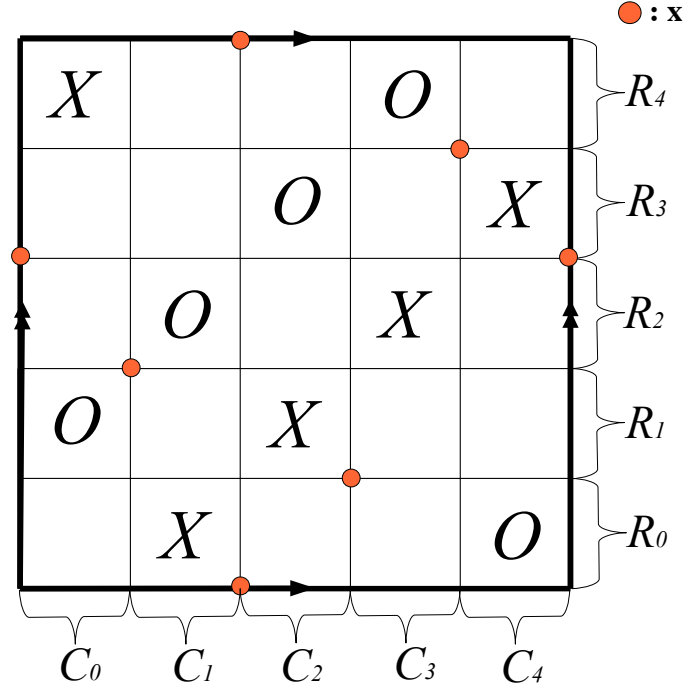


Figura 14: Un generatore di $(C(\Gamma), \partial)$ è \mathbf{x} .

3.1.2 Operatore di bordo

Siano \mathbf{x} e \mathbf{y} due generatori in Y e sia r un rettangolo immerso in T , i cui lati giacciono sulle circonferenze orizzontali α_i e su quelle verticali β_j .

Definizione 3.1.3. Il rettangolo r collega \mathbf{x} a \mathbf{y} se:

- i generatori \mathbf{x} e \mathbf{y} differiscono al più lungo due circonferenze orizzontali;
- i quattro vertici di r sono punti di $\mathbf{x} \cup \mathbf{y}$;
- attraversando ogni componente orizzontale del bordo di r nella direzione indotta da T , gli archi sono diretti da \mathbf{x} a \mathbf{y} .

Con $R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ denotiamo l'insieme dei rettangoli che collegano \mathbf{x} a \mathbf{y} .

Osservazione 3.1.4. Se \mathbf{x} e \mathbf{y} differiscono esattamente lungo due circonferenze orizzontali, allora esistono esattamente due rettangoli appartenenti a $R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, altrimenti $R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \emptyset$ (vedi Figura 15).

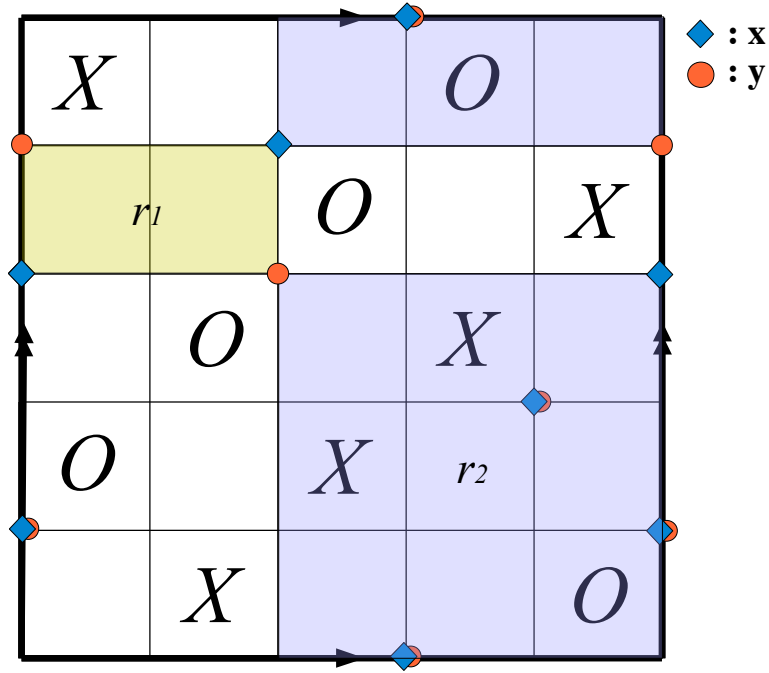


Figura 15: In colori diversi sono indicati i due rettangoli r_1 e r_2 che collegano \mathbf{x} a \mathbf{y} . Poiché $P_{\mathbf{x}}(r_1) = P_{\mathbf{y}}(r_1) = \frac{1}{2}$ e $P_{\mathbf{x}}(r_2) = P_{\mathbf{y}}(r_2) = \frac{5}{2}$, allora $P_{\mathbf{x}}(r_1) + P_{\mathbf{y}}(r_1) = 1$ e $P_{\mathbf{x}}(r_2) + P_{\mathbf{y}}(r_2) = 5$. Inoltre abbiamo che $n_{\mathbb{O}}(r_1) = 0$, $n_{\mathbb{X}}(r_1) = 0$, $n_{\mathbb{O}}(r_2) = 2$, $n_{\mathbb{X}}(r_2) = 2$, quindi \mathbf{x} è collegato a \mathbf{y} dall'operatore di bordo.

Definizione 3.1.5. Dato un rettangolo r , con $n_{\mathbb{O}}(r)$ e $n_{\mathbb{X}}(r)$ indichiamo rispettivamente, quante O e quante X sono contenute in r .

Fissato $\mathbf{x} \in Y$, sia q il punto d'intersezione tra una circonferenza orizzontale α_i ed una verticale β_j .

Vicino a q , un rettangolo r ha quattro molteplicità locali $\{m_{k,l}\}_{k \in \{i-1,i\}, l \in \{j-1,j\}}$

definite come segue (vedi Figura 16):

$$m_{k,l} = \begin{cases} 0 & \text{se } R_k \cap C_l \not\subseteq r \\ 1 & \text{se } R_k \cap C_l \subseteq r. \end{cases}$$

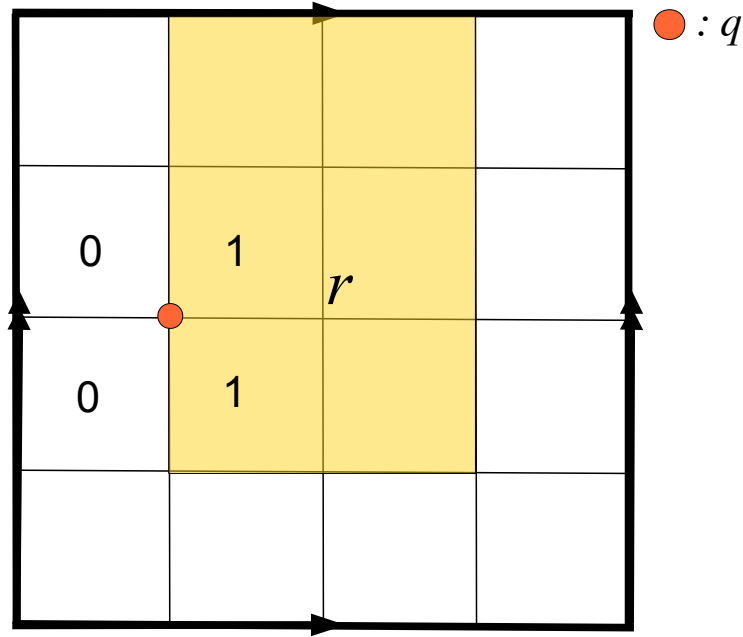


Figura 16: $q = \alpha_2 \cap \beta_1$ e r è un rettangolo. In questo caso due delle molteplicità locali di r vicino a q sono 1, mentre le altre due sono 0, quindi $p_q(r) = \frac{1}{2}$.

Definizione 3.1.6. La *molteplicità locale* $p_q(r)$, di r in q , è la media aritmetica delle quattro molteplicità locali di r vicino a q . Definiamo $P_{\mathbf{x}}(r) := \sum_{q \in \mathbf{x}} p_q(r)$.

Definizione 3.1.7. Definiamo l'operatore di bordo del complesso di catene $\partial : C(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma)$ nel modo seguente:

$$\partial \mathbf{x} = \sum_{\mathbf{y} \in Y} \left\{ \begin{array}{c} r \in R_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} : P_{\mathbf{x}}(r) + P_{\mathbf{y}}(r) = 1, \\ n_{\mathbb{O}}(r) = n_{\mathbb{X}}(r) = 0 \end{array} \right\} \mathbf{y}.$$

Nel caso in cui $\partial\mathbf{x} = \mathbf{y}$, diremo che l'operatore di bordo ∂ collega \mathbf{x} a \mathbf{y} .

Proposizione 3.1.8. [MOS06] Vale $\partial^2 = 0$, quindi $(C(\Gamma), \partial)$ è un complesso di catene. Inoltre, $(C(\Gamma), \partial)$ è isomorfo al complesso $(C(T_g, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}, \mathbf{z}), \partial)$ (vedi Definizione 1.4.10).

Ora definiamo delle quantità combinatorie, calcolabili a partire da Γ , che corrispondono alle gradazioni associate ai generatori di $C(\Gamma)$.

3.1.3 Gradazione di spin

La gradazione di spin assume valori in un insieme con la stessa cardinalità di $Spin^c(S^3)$, che è in corrispondenza biunivoca con $H^2(S^3, \mathbb{Z})$ (vedi Proposizione 1.4.15). Poiché, per la dualità di Poincaré, $H^2(S^3, \mathbb{Z}) \cong H_1(S^3, \mathbb{Z}) = 0$, su S^3 vi è un'unica struttura di spin. Dunque tutti i generatori di $C(\Gamma)$ hanno lo stesso grado di spin.

3.1.4 Gradazione di Maslov

Indichiamo con \mathbf{x}_0 il generatore individuato dagli n punti che occupano il vertice inferiore sinistro di ciascuna cella che contiene una O (vedi Figura 17).

Definizione 3.1.9. Definiamo una funzione $\mathbf{M} : Y \rightarrow \mathbb{Q}$ nel modo seguente. Convenendo che $\mathbf{M}(\mathbf{x}_0) = 1 - n$, la funzione \mathbf{M} è univocamente determinata dalla proprietà che, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Y$ e per ogni rettangolo r che collega \mathbf{x} ad \mathbf{y} , vale:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}(\mathbf{y}) = P_{\mathbf{x}}(r) + P_{\mathbf{y}}(r) - 2n_{\mathbb{Q}}(r). \quad (3.1)$$

Notiamo che il secondo membro dell'equazione è ben definito, cioè non dipende dal rettangolo r scelto. Infatti, siano $\{R_i\}_{i=1}^n$ e $\{C_i\}_{i=1}^n$ le n corone circolari, che sono rispettivamente le componenti connesse di $T - \alpha_1 - \dots - \alpha_n$ e di $T - \beta_1 - \dots - \beta_n$. Se r e r' sono due rettangoli che collegano \mathbf{x} a \mathbf{y} , allora essi si ottengono uno dall'altro aggiungendo o sottraendo un numero finito di corone circolari R_i e C_j . Ma per ogni corona circolare A vale $P_{\mathbf{x}}(A) = 1 = P_{\mathbf{y}}(A)$ e inoltre $n_{\mathbb{Q}}(A) = 1$, quindi il secondo membro dell'equazione non cambia.

Proposizione 3.1.10. [MOS06] La funzione \mathbf{M} definita su Y corrisponde al grado di Maslov definito sui generatori di $(C(T_g, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}, \mathbf{z}), \partial)$ (vedi Definizione 1.4.16).

Osservazione 3.1.11. Dall'equazione (3.1) deduciamo l'uguaglianza $\mathbf{M}(\partial\mathbf{x}) = \mathbf{M}(\mathbf{x}) - 1$, cioè l'operatore di bordo fa diminuire di 1 il grado di Maslov.

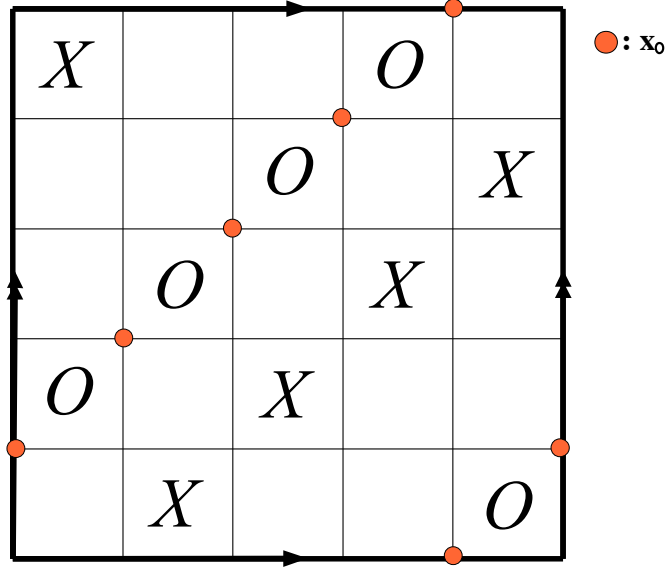


Figura 17: Generatore \mathbf{x}_0 avente grado di Maslov -4 .

3.1.5 Gradazione di Alexander

Dato un punto q appartenente ad un grid diagram compatibile con un nodo \vec{K} , il *winding number* della proiezione di \vec{K} rispetto a q è il numero di giri che la proiezione di \vec{K} fa attorno a q , con la convenzione che se la proiezione di \vec{K} gira attorno a q in senso orario allora il winding number è positivo, altrimenti è negativo.

Definizione 3.1.12. Sia $a : \alpha \cap \beta \rightarrow \mathbb{Z}$, la funzione che ad un punto $q \in \alpha \cap \beta$ associa il winding number della proiezione di \vec{K} attorno a q (vedi Figura 18).

Dato che ogni O ed ogni X giace in un quadrato, se n è il grid number di Γ , otteniamo $n \leq k \leq 2n$ quadrati. Sia $\{c_{i,j}\}$ per $i \in \{1, \dots, k\}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ l'insieme dei vertici dei k quadrati che contengono O o X .

Definizione 3.1.13. La funzione $\mathbf{A} : Y \rightarrow \mathbb{Q}$ è definita come segue.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{q \in \mathbf{x}} a(q) - \frac{1}{8} \left(\sum_{i,j} a(c_{i,j}) \right) - \frac{(n-1)}{2}. \quad (3.2)$$

Proposizione 3.1.14. [MOS06] La funzione \mathbf{A} definita su Y , corrisponde al grado di Alexander definito sui generatori di $(C(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z}), \partial)$ (vedi Definizione 1.4.18).

sviluppare l'algoritmo combinatorio appena mostrato. Per questo scopo, utilizzando le notazioni precedenti, confrontiamo schematicamente i complessi $(C(T, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z}), \partial)$ e $(C(\Gamma), \partial)$.

Complesso di catene $(C(T, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z}), \partial)$	Complesso di catene $(C(\Gamma), \partial)$
Numero di punti base: k	Grid number di T : n
Generatori: $\mathbf{x} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$	Generatori: $\mathbf{x} \in Y$
Dischi di Whitney: $\phi \in \Pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	Rettangoli: $r \in R_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$
Indice di Maslov $\mu(\phi)$	Somma di molteplicità locali $P_{\mathbf{x}}(r) + P_{\mathbf{y}}(r)$
Somma di intersezioni algebriche $\sum_{i=1}^k n_{w_i}(\phi)$	O contenute in un rettangolo $n_{\mathbb{O}}(r)$
Somma di intersezioni algebriche $\sum_{i=1}^k n_{z_i}(\phi)$	X contenute in un rettangolo $n_{\mathbb{X}}(r)$

3.2 Descrizione combinatoria della \widehat{HFL} in S^3

La Knot Floer Homology ha una generalizzazione al caso dei link orientati e anche la sua descrizione combinatoria si può estendere in tale caso.

Sia $\vec{L} \subset S^3$ un link orientato con l componenti e sia $\Gamma = (T, \alpha, \beta, \mathbb{O}, \mathbb{X})$ una sua grid presentation. Fissiamo un ordinamento per le componenti di \vec{L} e numeriamo gli elementi di \mathbb{O} (rispettivamente di \mathbb{X}) tenendo conto della componente del link a cui appartengono. Per $j = 1, \dots, l$ avremo k_j elementi di \mathbb{O} (rispettivamente di \mathbb{X}) che appartengono alla j -esima componente di \vec{L} . Così gli elementi di \mathbb{O} (rispettivamente di \mathbb{X}) possono essere numerati come $O_{j,i}$ (rispettivamente $X_{j,i}$) per $j = 1, \dots, l$ e $i = 1, \dots, k_j$.

I generatori della \widehat{HFL} , l'operatore di bordo, il grado di spin e il grado di Maslov sono definiti come nel caso della \widehat{HFK} ; leggermente diverso è invece il caso del gradazione di Alexander che assume la connotazione di multigradazione.

3.2.1 Gradazione di Alexander

Consideriamo la componente j -esima del link \vec{L} . Per $i = 1, \dots, k_j$, ogni $O_{j,i}$ ed ogni $X_{j,i}$ giace in una cella. Sia $\{c_{j,m,h}\}$, per $m \in \{1, \dots, 2k_j\}$ e $h \in \{1, 2, 3, 4\}$, l'insieme dei vertici dei $2k_j$ quadrati contenenti una $X_{j,i}$ o una $O_{j,i}$. Sia k_j il numero di punti base della componente j -esima di \vec{L} e sia a la funzione definita nella Sottosezione 3.1.5.

Definizione 3.2.1. Definiamo la funzione $\mathbf{A} : Y \rightarrow \mathbb{Q}^l$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \left(\sum_{q \in \mathbf{x}} a(q) - \frac{1}{8} \left(\sum_{m,h} a(c_{1,m,h}) \right) - \frac{(n_1 - 1)}{2}, \dots, \sum_{q \in \mathbf{x}} a(q) - \frac{1}{8} \left(\sum_{m,h} a(c_{l,m,h}) \right) - \frac{(n_l - 1)}{2} \right). \quad (3.3)$$

La funzione \mathbf{A} definita su Y , corrisponde al multigrado di Alexander definito sui generatori di $(C(T_g, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}, \mathbf{z}), \partial)$ (vedi Definizione 1.4.20).

3.2.2 Omologia

Come nel caso di un nodo possiamo definire l'omologia $H(C(\Gamma), \partial)$ del complesso di catene $(C(\Gamma), \partial)$. Per $j = 1, \dots, l$ sia V_j uno \mathbb{Z}_2 -spazio vettoriale di dimensione due, avente una base formata da un elemento con bigradazione di Maslov-Alexander $(0, (0, 0, \dots, 0))$ e da un elemento con bigradazione $(-1, -\vec{e}_j)$, dove \vec{e}_j indica il j -esimo vettore della base canonica di \mathbb{R}^l . Utilizzando la notazione precedente possiamo enunciare il seguente teorema.

Teorema 3.2.2. [MOS06] Consideriamo un link $\vec{L} \subset S^3$ e una sua grid presentation Γ . Allora:

$$H(C(\Gamma), \partial) \cong \widehat{HFL}(\vec{L}) \otimes \bigotimes_{i=1}^l V_j^{\otimes (k_j - 1)},$$

dove $2k_j$ indica il numero di punti base della j -esima componente di \vec{L} .

3.3 Descrizione combinatoria della \widehat{HFK} in $L(p, q)$

Sia \vec{K} un nodo in $L(p, q)$ e sia $\Gamma = (T, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbb{O}, \mathbb{X})$ una sua grid presentation. Seguendo [BGH08], associamo a Γ un complesso di catene $(C(\Gamma), \partial)$.

3.3.1 Generatori

Come nel caso di S^3 , i generatori di $(C(\Gamma), \partial)$ sono le n -uple non ordinate di punti di intersezione $\boldsymbol{\alpha} \cap \boldsymbol{\beta}$.

Definizione 3.3.1. Chiamiamo *componenti* di \mathbf{x} , gli n punti di cui consiste un generatore $\mathbf{x} \in Y$, e denotiamo con x_i la componente α_i , cioè l'unica componente di \mathbf{x} giacente sulla circonferenza α_i .

Indicando con S_n il gruppo delle permutazioni di n elementi, i generatori di $C(\Gamma)$ sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $S_n \times \mathbb{Z}_p^n$ (vedi Figura 19). Infatti, ad un elemento $\{\sigma, (a_0, \dots, a_{n-1})\} \in S_n \times \mathbb{Z}_p^n$ possiamo associare l'unico $\mathbf{x} \in Y$ tale che:

- la componente α_i di \mathbf{x} giace in $\alpha_i \cap \beta_{\sigma(i)}$;
- la componente α_i è la a_i -esima intersezione in $\alpha_i \cap \beta_{\sigma(i)}$. La numerazione, tra 0 e $p-1$, delle p intersezioni distinte in $\alpha_i \cap \beta_{\sigma(i)}$, cresce all'aumentare dell'ascissa di α_i .

Per comodità conveniamo di indicare con $[c_0, \dots, c_{n-1}]$ la permutazione

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & n-1 \\ c_0 & \dots & c_{n-1} \end{pmatrix} \in S_n.$$

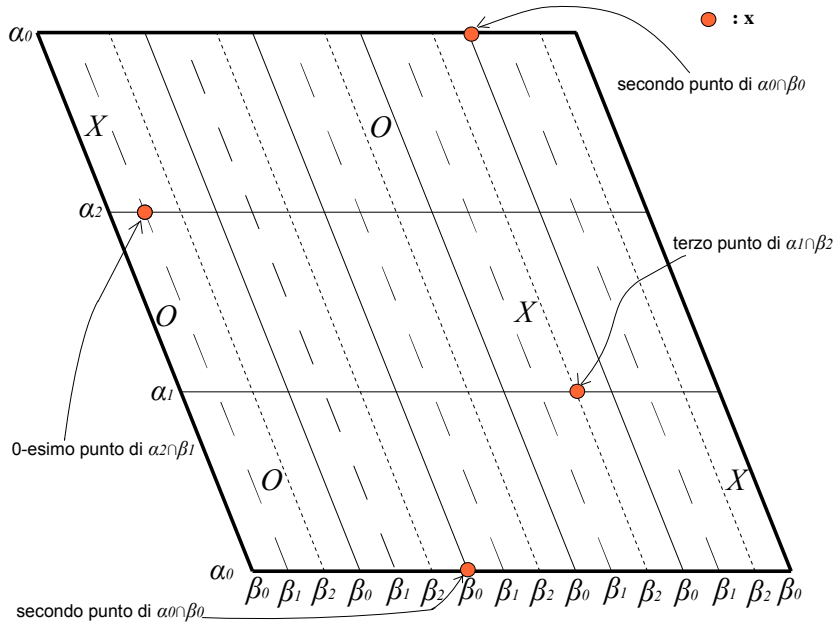


Figura 19: Grid diagram con grid number 3 in $L(5, 2)$. \mathbf{x} è il generatore di $(C(\Gamma), \partial)$ corrispondente a $\{[0 \ 2 \ 1], (2, 3, 0)\} \in S_3 \times \mathbb{Z}_5^3$.

Definizione 3.3.2. Denotiamo con $C(\Gamma)$ lo \mathbb{Z}_2 -spazio vettoriale che ha l'insieme Y come base.

3.3.2 Operatore di bordo

Definizione 3.3.3. Un *parallelogramma* è un quadrilatero propriamente immerso in T , cioè un quadrilatero avente come vertici dei punti di $\alpha \cap \beta$ e i cui lati coincidono con archi delle curve α e β .

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Y$ e sia P un parallelogramma.

Definizione 3.3.4. Il parallelogramma P *collega* \mathbf{x} a \mathbf{y} se:

- i generatori \mathbf{x} e \mathbf{y} differiscono al più per due componenti $\{x_i, x_j\}$ e $\{y_i, y_j\}$;
- i punti $\{x_i, x_j, y_i, y_j\}$ sono i vertici di P ;
- i punti $\{x_i, x_j, y_i, y_j\}$ sono posizionati in modo che gli archi su ∂P lungo α_i (o α_j) siano orientati da x_i a y_i (o da x_j a y_j); cioè ∂P è orientato in senso antiorario rispetto al centro di P .

Con $R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ denotiamo l'insieme dei parallelogrammi che collegano \mathbf{x} a \mathbf{y} .

Definizione 3.3.5. Un parallelogramma tra \mathbf{x} e \mathbf{y} si dice *ammissibile* se la sua parte interna non contiene componenti di \mathbf{x} o di \mathbf{y} . Per ogni coppia di generatori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Y$, $PG(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ denota l'insieme dei parallelogrammi ammissibili che collegano \mathbf{x} a \mathbf{y} .

Osservazione 3.3.6. Se le componenti di \mathbf{x} e quelle di \mathbf{y} differiscono esattamente in due righe, allora \mathbf{x} e \mathbf{y} sono collegati da due parallelogrammi.

Osservazione 3.3.7. In generale, come mostrato in Figura 20, abbiamo che $R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq R(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Definizione 3.3.8. Definiamo l'operatore di bordo del complesso di catene $\partial : C(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma)$:

$$\partial \mathbf{x} = \sum_{\mathbf{y} \in Y} \left\{ \sum_{\substack{P \in PG(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \\ n_{\mathbb{Q}}(P) = n_{\mathbb{X}}(P) = 0}} \mathbf{y} \right\}.$$

Proposizione 3.3.9. [BGH08] Il complesso di catene $(C(\Gamma), \partial)$ è isomorfo al complesso $(C(T_g, \alpha, \beta, \mathbf{w}, \mathbf{z}), \partial)$ (vedi Definizione 1.4.10).

Come nel caso di S^3 , definiamo delle quantità combinatorie che corrispondono alle gradazioni della $\widehat{HF\widehat{K}}$ per un nodo in $L(p, q)$.

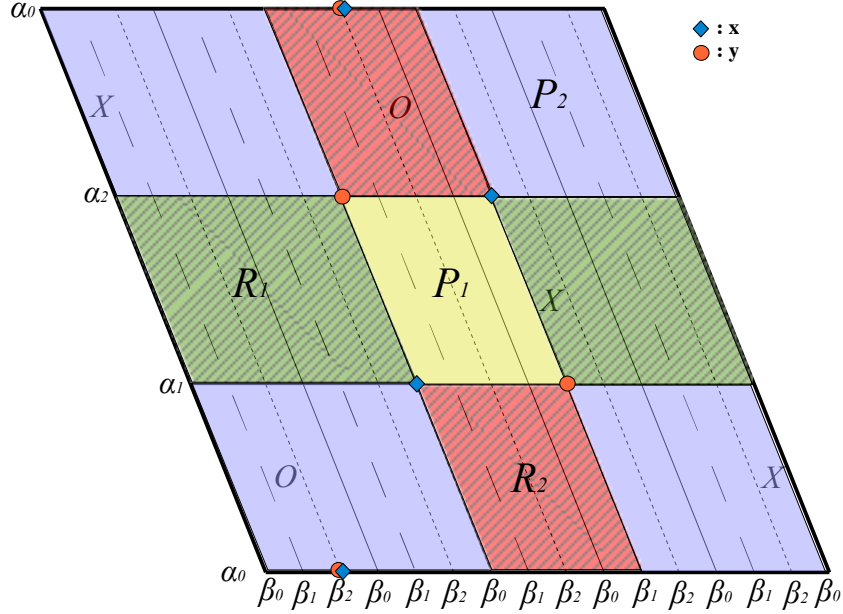


Figura 20: I due parallelogrammi P_1 e P_2 collegano \mathbf{x} a \mathbf{y} , mentre R_1 e R_2 sono i due parallelogrammi che collegano \mathbf{y} a \mathbf{x} .

I parallelogrammi P_1 e R_1 sono entrambi ammissibili, mentre P_2 e R_2 non lo sono. Inoltre $n_{\mathbb{O}}(P_1) = n_{\mathbb{X}}(P_1) = 0$, quindi \mathbf{x} è collegato a \mathbf{y} dall'operatore di bordo.

3.3.3 Gradazione di spin

Per la proposizione 1.4.15, il grado di spin assume valori nell'insieme $\mathbb{Z}_p \cong H^2(L(p, q), \mathbb{Z}) \cong \text{Spin}^c(L(p, q))$. Vediamo come è definito. Sia $\mathbf{x}_{\mathbb{O}} \in Y$ il generatore che ha per componenti i vertici inferiori sinistri degli n parallelogrammi distinti in $T - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}$ che contengono gli elementi di \mathbb{O} . Sia $\{\sigma_{\mathbb{O}}, (a_0, \dots, a_{n-1})\}$ l'elemento di $S_n \times \mathbb{Z}_p^n$ corrispondente a $\mathbf{x}_{\mathbb{O}}$ e sia \mathbf{x} l'elemento corrispondente a $\{\sigma, (b_0, \dots, b_{n-1})\}$.

Definizione 3.3.10. Definiamo la funzione $\mathbf{S} : Y \rightarrow \mathbb{Z}_p$.

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) \equiv [q - 1 + (\sum_{i=0}^{n-1} b_i - \sum_{i=0}^{n-1} a_i)] \mod p. \quad (3.4)$$

Proposizione 3.3.11. [BGH08] La funzione \mathbf{S} definita su Y corrisponde al grado di spin definito sui generatori di $(C(T_g, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}, \mathbf{z}), \partial)$.

Osservazione 3.3.12. L'operatore di bordo preserva il grado di spin [OS04.1], perciò $\partial \mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x})$. Quindi il complesso di catene $(C(\Gamma), \partial)$ si spezza in somma diretta in accordo con la gradazione di spin.

Osservazione 3.3.13. Il calcolo combinatorio della gradazione di spin coinvolge solo i punti di \mathbb{O} e non i punti di \mathbb{X} .

3.3.4 Gradazione di Maslov

Definizione 3.3.14. Sia $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ la funzione definita induttivamente da:

$$\begin{aligned} d(1, 0, 0) &= 0 \\ d(p, q, i) &= \left(\frac{pq - (2i + 1 - p - q)^2}{4pq} \right) - d(q, r, j) \end{aligned}$$

dove $r \equiv p \pmod{q}$ e $j \equiv i \pmod{q}$.

Definizione 3.3.15. Definiamo la funzione:

$$W : \left\{ \begin{array}{c} \text{Insiemi finiti di} \\ \text{punti in } \Gamma \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Insiemi finiti di coppie } (a, b) \\ \text{con } a \in [0, pn), b \in [0, n) \end{array} \right\}$$

che a n punti di Γ associa le loro coordinate in \mathbb{R}^2 rispetto alla base ordinata:

$$\left(\vec{v}_1 = \left(\frac{1}{np}, 0 \right), \vec{v}_2 = \left(-\frac{q}{np}, \frac{1}{n} \right) \right).$$

Assumiamo che i punti di \mathbb{O} e \mathbb{X} siano posti al centro dei rispettivi parallelogrammi. In questo modo, rispetto alla base (\vec{v}_1, \vec{v}_2) , i generatori \mathbf{x} hanno coordinate intere, mentre i punti di \mathbb{O} e \mathbb{X} hanno coordinate razionali.

Definizione 3.3.16. Definiamo ora la funzione:

$$C_{p,q} : \left\{ \begin{array}{c} \text{Insiemi finiti di coppie } (a, b) \\ \text{con } a \in [0, pn), b \in [0, n) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Insiemi finiti di coppie } (a, b) \\ \text{con } a, b \in [0, pn) \end{array} \right\}$$

che a una n -upla di coordinate

$$((a_i, b_i))_{i=0}^{n-1}$$

associa una pn -upla di coordinate

$$(a_i + nqk \pmod{np}, b_i + nk)_{i=0, k=0}^{i=n-1, k=p-1}.$$

Siano A e B due insiemi finiti di coppie di coordinate.

Definizione 3.3.17. Sia $\widetilde{W} = C_{p,q} \circ W$ e sia I la funzione che a una coppia ordinata (A, B) associa la cardinalità dell'insieme delle coppie $(a, b) \in A \times B$, $a = (a_1, a_2) \in A$, $b = (b_1, b_2) \in B$, tali che $a_i < b_i$ per $i = 1, 2$.

Definizione 3.3.18. Definiamo una funzione $\mathbf{M} : Y \rightarrow \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{x}) = & \frac{1}{p} (I(\widetilde{W}(\mathbf{x}), \widetilde{W}(\mathbf{x})) - I(\widetilde{W}(\mathbf{x}), \widetilde{W}(\mathbb{O})) - I(\widetilde{W}(\mathbb{O}), \widetilde{W}(\mathbf{x})) + \\ & + I(\widetilde{W}(\mathbb{O}), \widetilde{W}(\mathbb{O})) + 1) + d(p, q, q - 1) + \frac{p - 1}{p}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Proposizione 3.3.19. [BGH08] La funzione \mathbf{M} definita su Y corrisponde al grado di Maslov definito sui generatori di $(C(T_g, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}, \mathbf{z}), \partial)$ (vedi Definizione 1.4.16).

Osservazione 3.3.20. Ricordiamo che $\mathbf{M}(\partial(\mathbf{x})) = \mathbf{M}(\mathbf{x}) - 1$ (vedi Osservazione 1.4.21), cioè che l'operatore di bordo fa calare di 1 il grado di Maslov.

Osservazione 3.3.21. Il calcolo combinatorio del grado di Maslov coinvolge solo i punti di \mathbb{O} e non i punti di \mathbb{X} .

3.3.5 Gradazione di Alexander

Il grado di Maslov $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ appena definito, dipende solo da \mathbb{O} , e quindi lo denotiamo con $\mathbf{M}_{\mathbb{O}}(\mathbf{x})$. D'altra parte, sostituendo \mathbb{X} a \mathbb{O} , possiamo definire una gradazione $\mathbf{M}_{\mathbb{X}}(\mathbf{x})$ che dipende solo da \mathbb{X} .

Definizione 3.3.22. Definiamo una funzione $\mathbf{A} : Y \rightarrow \mathbb{Q}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{M}_{\mathbb{O}}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) - (n - 1)). \quad (3.6)$$

Proposizione 3.3.23. [BGH08] La funzione \mathbf{A} definita su Y corrisponde al grado di Alexander definito sui generatori di $(C(T_g, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}, \mathbf{z}), \partial)$ (vedi Definizione 1.4.18).

Osservazione 3.3.24. Ricordiamo (Osservazione 1.4.21) che $\mathbf{A}(\partial(\mathbf{x})) = \mathbf{A}(\mathbf{x})$, cioè che l'operatore di bordo preserva il grado di Alexander.

Osservazione 3.3.25. Il calcolo combinatorio del grado di Alexander coinvolge sia gli elementi di \mathbb{O} che quelli di \mathbb{X} .

3.3.6 Omologia

Poiché $\partial^2 = 0$ [BGH08], possiamo definire l'omologia associata al complesso di catene $(C(\Gamma), \partial)$, ottenendo uno \mathbb{Z}_2 -spazio vettoriale bigraduato. Sia V uno \mathbb{Z}_2 -spazio vettoriale di dimensione due, avente una base formata da un elemento con bigradazione di Maslov-Alexander $(-1, -1)$ e da un elemento con bigradazione $(0, 0)$.

Teorema 3.3.26. *Consideriamo un nodo $\vec{K} \subset L(p, q)$ e una sua grid presentation Γ , avente grid number n . Allora $H(C(\Gamma), \partial)$ è isomorfo al gruppo bigraduato $\widehat{HFK}(\vec{K}) \otimes V^{\otimes(n-1)}$.*

Dimostrazione. Utilizziamo la Proposizione 2.2 di [BGH08] e concludiamo come nella parte finale della dimostrazione della Proposizione 2.3 [MOS06]. \square

3.4 Descrizione combinatoria della \widehat{HFL} in $L(p, q)$

Sia $\vec{L} \subset L(p, q)$ un link orientato con l componenti e sia $\Gamma = (T, \alpha, \beta, \mathbb{O}, \mathbb{X})$ una sua grid presentation. Fissiamo un ordinamento per le componenti di \vec{L} e indicizziamo gli elementi di \mathbb{O} (rispettivamente di \mathbb{X}) tenendo conto della componente del link a cui appartengono. Per $j = 1, \dots, l$ avremo k_j elementi di \mathbb{O} (rispettivamente di \mathbb{X}) che appartengono alla j -esima componente di \vec{L} . Così gli elementi di \mathbb{O} (rispettivamente di \mathbb{X}) possono essere indicizzati come $O_{j,i}$ (rispettivamente $X_{j,i}$) per $j = 1, \dots, l$ e $i = 1, \dots, k_j$.

I generatori della \widehat{HFL} , l'operatore di bordo, il grado di spin e il grado di Maslov sono definiti come nel caso della \widehat{HFK} ; leggermente diverso è invece il caso della gradazione di Alexander, la quale assume la connotazione di multigradazione.

3.4.1 Gradazione di Alexander

Consideriamo l'insieme \mathbb{O}_j degli elementi di \mathbb{O} che appartengono alla j -esima componente di \vec{L} . Sia $2n_j$ il numero di punti base della j -esima componente e sia $\mathbf{M}_{\mathbb{O}_j}(\mathbf{x})$ il grado di Maslov di \mathbf{x} calcolato rispetto a \mathbb{O}_j . Il multigrado di Alexander corrisponde alla funzione $\mathbf{A} : Y \rightarrow \mathbb{Q}^l$ definita come segue.

Definizione 3.4.1.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{M}_{\mathbb{O}_1}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}_{\mathbb{X}_1}(\mathbf{x}) - (n_1 - 1), \dots, \mathbf{M}_{\mathbb{O}_l}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}_{\mathbb{X}_l}(\mathbf{x}) - (n_l - 1) \right). \quad (3.7)$$

3.4.2 Omologia

Come nel caso di un nodo, possiamo definire l'omologia $H(C(\Gamma), \partial)$ del complesso di catene $(C(\Gamma), \partial)$. Per $j = 1, \dots, l$, sia V_j uno \mathbb{Z}_2 -spazio vettoriale di dimensione due, avente una base formata da un elemento con bigradazione di Maslov-Alexander $(0, (0, 0, \dots, 0))$ e da un elemento con bigradazione $(-1, -\vec{e}_j)$, dove \vec{e}_j indica il j -esimo vettore della base canonica di \mathbb{R}^l .

Teorema 3.4.2. *Consideriamo un link $\vec{L} \subset L(p, q)$ e una sua grid presentation Γ . Allora:*

$$H(C(\Gamma), \partial) \cong \widehat{HFL}(\vec{L}) \otimes \bigotimes_{j=1}^l V_j^{\otimes (n_j-1)},$$

dove $2n_j$ indica il numero di punti base della j -esima componente di \vec{L} .

Dimostrazione. La Proposizione 7.2 di [OS04.2] rimane valida nel caso di spazi lenticolari e non solo nel caso di S^3 ; dunque, utilizzando un argomento analogo a quello nella prova della Proposizione 2.5 di [MOS06], deduciamo il risultato. \square

3.5 Osservazioni

In questa sezione utilizziamo i calcoli esposti nel Capitolo 4 per trarre alcune conclusioni sulla \widehat{HFL} di link in spazi lenticolari. Indichiamo con $\mathbb{Z}_2[i, j, (k_1, \dots, k_l)]$, uno \mathbb{Z}_2 -spazio vettoriale a cui sono associati un grado di spin i , un grado di Maslov j e un multigrado di Alexander (k_1, \dots, k_l) .

3.5.1 \widehat{HFL} è un invariante essenziale

Definizione 3.5.1. Diciamo che un invariante è *inessenziale* se non distingue link in $L(p, q)$ che hanno lo stesso sollevamento a S^3 . In caso contrario diciamo che un invariante è *essenziale*.

Proposizione 3.5.2. *L'omologia \widehat{HFL} è un invariante essenziale.*

Dimostrazione. Consideriamo l'Esempio 4.2.1. I nodi K_1 e K_2 in Figura 21 hanno diversa classe di omologia in $L(5, 2)$ (vedi Esempio 2.2.11), quindi non sono equivalenti [Man13]. Abbiamo che K_1 e K_2 hanno stesso sollevamento ad S^3 (vedi Esempio 4.2.1) e che:

$$\widehat{HFK}(\vec{K}_1) \cong \mathbb{Z}_2[0, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[1, -\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[2, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[3, 0, \frac{1}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[4, \frac{2}{5}, 0];$$

$$\widehat{HFK}(\vec{K}_2) \cong \mathbb{Z}_2[0, -\frac{2}{5}, 0] \oplus \mathbb{Z}_2[1, -\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[2, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[3, 0, -\frac{1}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[4, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}],$$

dunque $\widehat{HFK}(\vec{K}_1) \neq \widehat{HFK}(\vec{K}_2)$. □

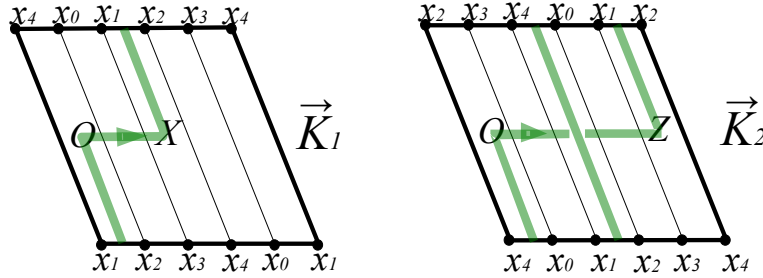


Figura 21: Nodi \vec{K}_1 e \vec{K}_2 in $L(5, 2)$.

Un'altra coppia di link con lo stesso sollevamento, ma diversa \widehat{HFL} , è riportato nell'Esempio 4.2.4, in cui esaminiamo i link \vec{L}_1 e \vec{L}_2 in $L(4, 1)$.

3.5.2 \widehat{HFK} e orientazione di un nodo

Facciamo ora alcune osservazioni riguardanti l'orientazione di un nodo.

Osservazione 3.5.3. In generale, scambiando la posizione degli elementi di \mathbb{O} con la posizione degli elementi di \mathbb{X} , otteniamo una grid presentation del nodo che ha orientazione opposta rispetto a quella iniziale.

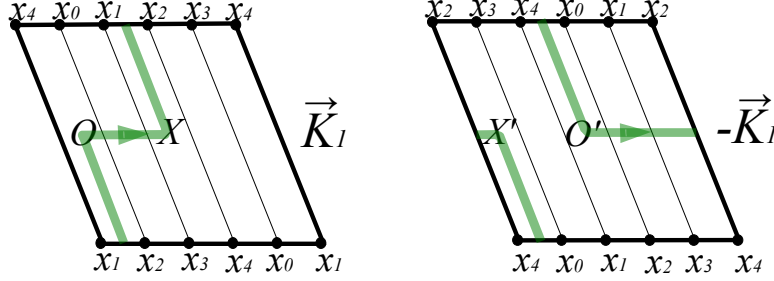


Figura 22: Nodi \vec{K}_1 e $-\vec{K}_1$ in $L(5, 2)$.

Consideriamo i nodi orientati \vec{K}_1 e $-\vec{K}_1$ in Figura 22 (Esempio 4.2.3). Nel Capitolo 4 mostriamo che:

$$\widehat{HFK}(\vec{K}_1) \cong \mathbb{Z}_2[0, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[1, -\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[2, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[3, 0, \frac{1}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[4, \frac{2}{5}, 0];$$

$$\widehat{HFK}(-\vec{K}_1) \cong \mathbb{Z}_2[0, -\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[1, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[2, \frac{2}{5}, 0] \oplus \mathbb{Z}_2[3, 0, \frac{1}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[4, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}].$$

Osservazione 3.5.4. I nodi \vec{K}_1 e $-\vec{K}_1$ sono equivalenti a meno dell'orientazione, però $\widehat{HFK}(\vec{K}_1) \neq \widehat{HFK}(-\vec{K}_1)$, quindi \widehat{HFK} tiene conto dell'orientazione.

Sia Γ una grid presentation con grid number n del nodo orientato \vec{K} e sia $-\Gamma$ una grid presentation di $-\vec{K}$, costruita a partire da Γ , scambiando gli elementi di \mathbb{O} con quelli di \mathbb{X} .

Proposizione 3.5.5. *I generatori di $H(C(\Gamma), \partial)$ sono in corrispondenza biunivoca con i generatori di $H(C(-\Gamma), \partial)$. Se \mathbf{x} è un generatore di $H(C(\Gamma), \partial)$ avente gradazione (s, m, a) , allora \mathbf{x} corrisponde ad un generatore di $H(C(-\Gamma), \partial)$ avente gradazione $(s + k, m - 2a - (n - 1), -a - (n - 1))$, dove k è una costante intera e n è il grid number di Γ .*

Dimostrazione. I generatori di $C(\Gamma)$ sono gli stessi di $C(-\Gamma)$, ma per comodità indicheremo con \mathbf{x} un generatore considerato in $C(\Gamma)$ e con $-\mathbf{x}$ lo stesso generatore considerato in $C(-\Gamma)$. Osserviamo che due generatori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (C(\Gamma), \partial)$ sono collegati dall'operatore di bordo se e solo se $-\mathbf{x}$ e $-\mathbf{y}$ lo sono nel complesso $(C(-\Gamma), \partial)$. Dunque, passando all'omologia del complesso di catene, gli elementi che generano $H(C(\Gamma), \partial)$ sono gli stessi che generano $H(C(-\Gamma), \partial)$, però in generale i generatori di $H(C(\Gamma), \partial)$ avranno una gradazione diversa dai generatori di $H(C(-\Gamma), \partial)$.

Prima di stabilire quale sia la relazione tra le gradazioni di $H(C(\Gamma), \partial)$ e quelle di $H(C(-\Gamma), \partial)$ ricordiamo che:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{M}_{\mathbb{O}}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) - (n-1)).$$

Dunque, conoscendo $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{M}_{\mathbb{O}}(\mathbf{x})$, possiamo ricavare $\mathbf{M}_{\mathbb{X}}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{M}_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}_{\mathbb{O}}(\mathbf{x}) - 2\mathbf{A}(\mathbf{x}) - (n-1).$$

Inoltre ricordiamo che:

$$\mathbf{M}_{\mathbb{O}}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}_{\mathbb{X}}(-\mathbf{x})$$

$$\mathbf{M}_{\mathbb{O}}(-\mathbf{x}) = \mathbf{M}_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}_{\mathbb{O}}(\mathbf{x}) - 2\mathbf{A}(\mathbf{x}) - (n-1);$$

e dunque:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(-\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{M}_{\mathbb{O}}(-\mathbf{x}) - \mathbf{M}_{\mathbb{X}}(-\mathbf{x}) - (n-1)) = \frac{1}{2}(\mathbf{M}_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}_{\mathbb{O}}(\mathbf{x}) - (n-1)) = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{M}_{\mathbb{O}}(\mathbf{x}) - 2\mathbf{A}(\mathbf{x}) - (n-1) - \mathbf{M}_{\mathbb{O}}(\mathbf{x}) - (n-1)) = -\mathbf{A}(\mathbf{x}) - (n-1). \end{aligned}$$

In questo modo la bigradazione di Maslov/Alexander di un generatore \mathbf{x} di $H(C(\Gamma), \partial)$, determina la bigradazione \mathbf{M}/\mathbf{A} di $-\mathbf{x}$. Rimane da associare a $-\mathbf{x}$ la gradazione di spin. Utilizzando la notazione del paragrafo 3.3.3, sia $\mathbf{x}_{\mathbb{O}} = \{\sigma_{\mathbb{O}}, (b_0, \dots, b_{n-1})\}$ e sia $\mathbf{x}_{\mathbb{X}} = \{\sigma_{\mathbb{X}}, (c_0, \dots, c_{n-1})\}$.

Ponendo $k := \sum_{i=0}^{n-1} b_i - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \pmod{p}$, abbiamo che:

$$\mathbf{S}(-\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) + k.$$

□

Dunque, dal complesso di catene $H(C(\Gamma), \partial)$ possiamo ricavare il complesso $H(C(-\Gamma), \partial)$ e di conseguenza, utilizzando il Teorema 3.3.26, possiamo trovare $\widehat{HFK}(-\vec{K})$.

Notiamo che, per il Teorema 3.3.26, nel caso il grid number di Γ sia 1, allora $\widehat{HFK}(\vec{K}) = H(C(\Gamma), \partial)$. Dunque, in tal caso, possiamo ricavare $\widehat{HFK}(-\vec{K})$ in modo diretto a partire da $\widehat{HFK}(\vec{K})$.

Questo è il caso dell'Esempio 4.2.3.

3.5.3 Relazione tra \widehat{HFL} in $L(p, q)$ e \widehat{HFL} nel sollevamento

Consideriamo ora i link \vec{L}_1 e \vec{L}_2 dell'Esempio 4.2.4. Possiamo confrontare la \widehat{HFL} dei link \vec{L}_1 e \vec{L}_2 con quella (calcolata nell'Esempio 4.1.1) del loro sollevamento ad S^3 , cioè il link di Hopf \vec{L} .

$$\widehat{HFK}(\vec{L}_1) \cong \mathbb{Z}_2[0, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z}_2[1, 0, 0] \oplus \mathbb{Z}_2[2, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z}_2[3, 0, 0];$$

$$\begin{aligned} \widehat{HFL}(\vec{L}_2) &\cong H(C(\Gamma_2), \partial) \cong \mathbb{Z}_2 \left[0, -\frac{3}{4}, (-\frac{3}{8}, -\frac{7}{8}) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[0, -\frac{7}{4}, (-\frac{3}{8}, -\frac{7}{8}) \right] \oplus \\ &\oplus \mathbb{Z}_2 \left[1, -2, (-\frac{5}{8}, -\frac{9}{8}) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[1, -1, (\frac{3}{8}, -\frac{9}{8}) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[1, 0, (\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}) \right] \oplus \\ &\oplus \mathbb{Z}_2 \left[1, -1, (-\frac{5}{8}, -\frac{1}{8}) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[2, \frac{1}{4}, (\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[2, -\frac{3}{4}, (\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}) \right] \oplus \\ &\oplus \mathbb{Z}_2 \left[3, 0, (-\frac{1}{8}, -\frac{5}{8}) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[3, -1, (-\frac{1}{8}, -\frac{5}{8}) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{HFL}(\vec{L}) &\cong \mathbb{Z}_2[0, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})] \oplus \mathbb{Z}_2[-1, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})] \oplus \mathbb{Z}_2[-1, (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})] \oplus \\ &\oplus \mathbb{Z}_2[-2, (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})]; \end{aligned}$$

dove $\mathbb{Z}_2[i, j, (k_1, k_2)]$ indica uno \mathbb{Z}_2 -spazio vettoriale a cui sono associati un grado di spin i , un grado di Maslov j e una bigradazione di Alexander (k_1, k_2) . Osserviamo che tra le \widehat{HFL} non sembrano esserci relazioni e in particolare, poiché link con diversa \widehat{HFL} sono sollevati allo stesso link, sembra improbabile che, in generale, la \widehat{HFL} di un link in $L(p, q)$ e quella del suo sollevamento siano strettamente correlate.

Capitolo 4

Calcolo della Link Floer Homology

In questo capitolo calcoliamo in modo esplicito le omologie \widehat{HFK} e \widehat{HFL} di alcuni link in S^3 e in $L(p, q)$. Nel caso di $L(p, q)$, alcuni calcoli sono stati ottenuti utilizzando un programma il cui codice è riportato in appendice. Nel corso del capitolo calcoliamo frequentemente l'omologia di un complesso di catene. A tal riguardo, conveniamo di indicare che due catene sono omologhe con il simbolo \sim .

4.1 Link in S^3

Prima di passare ad esempi significativi in $L(p, q)$, mostriamo il calcolo della \widehat{HFL} per un link in S^3 , cioè il link di Hopf.

Esempio 4.1.1. Come in [MOS06], consideriamo la grid presentation Γ illustrata in Figura 23 del link di Hopf \vec{L} .

I generatori di $C(\Gamma)$ sono in corrispondenza biunivoca con le $4!$ permutazioni $\sigma \in S_4$. Denotiamo con $(\sigma(0)\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3))$ il generatore che, per $i = 0, \dots, 3$, consiste dell'intersezione dell' i -esima circonferenza orizzontale con la $\sigma(i)$ -esima circonferenza verticale. Calcoliamo la gradazione di Maslov dei generatori notando, innanzitutto, che il generatore (3210) corrisponde al generatore \mathbf{x}_0 definito nel paragrafo 3.1.4; e quindi $\mathbf{M}(3210) = 1 - n = -3$. Successivamente, utilizzando l'equazione (3.1), confrontiamo i generatori di $C(\Gamma)$ per determinare il loro grado di Maslov. Fatto ciò, stabiliamo la bigradazione di Alexander dei generatori utilizzando l'equazione (3.3).

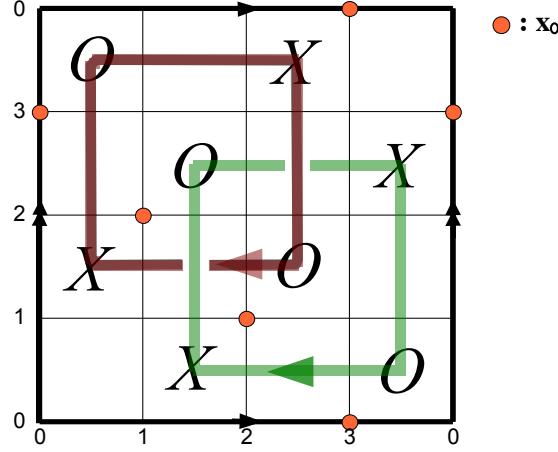


Figura 23: Γ ha grid number $n = 4$ e l'elemento (3210) corrisponde al generatore \mathbf{x}_0 .

	$\mathbf{A}=(0123)$	$\mathbf{E}=(0132)$	$\mathbf{C}=(0213)$	(0231)	(0312)	(0321)
\mathbf{M}	-1	-2	-2	-1	-1	0
\mathbf{A}	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

	$\mathbf{F}=(1023)$	$\mathbf{N}=(1032)$	(1203)	(1230)	$\mathbf{L}=(1302)$	(1320)
\mathbf{M}	-2	-3	-3	-2	-2	-1
\mathbf{A}	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

	(2013)	$\mathbf{I}=(2031)$	(2103)	(2130)	$\mathbf{B}=(2301)$	$\mathbf{H}=(2310)$
\mathbf{M}	-3	-2	-4	-3	-1	-2
\mathbf{A}	$(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

	(3012)	(3021)	(3102)	$\mathbf{D}=(3120)$	$\mathbf{G}=(3201)$	$\mathbf{M}=(3210)$
\mathbf{M}	-2	-1	-3	-2	-2	-3
\mathbf{A}	$(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

Notiamo che nel grid diagram Γ vi sono otto celle vuote. Procedendo come nel paragrafo 3.1.2, osserviamo che due generatori sono collegati da un rettangolo corrispondente ad una di queste celle, se e solo se tali generatori sono collegati dall'operatore di bordo. In Figura 24 mostriamo come i genera-

$$\begin{array}{cccc}
(1 \ 2 \ * \ *) & (* \ 2 \ 3 \ *) & (* \ * \ 3 \ 0) & (1 \ * \ * \ 0) \\
\downarrow \partial & \downarrow \partial & \downarrow \partial & \downarrow \partial \\
(2 \ 1 \ * \ *) & (* \ 3 \ 2 \ *) & (* \ * \ 0 \ 3) & (0 \ * \ * \ 1) \\
\\
(3 \ 0 \ * \ *) & (* \ 0 \ 1 \ *) & (* \ * \ 1 \ 2) & (3 \ * \ * \ 2) \\
\downarrow \partial & \downarrow \partial & \downarrow \partial & \downarrow \partial \\
(0 \ 3 \ * \ *) & (* \ 1 \ 0 \ *) & (* \ * \ 2 \ 1) & (2 \ * \ * \ 3)
\end{array}$$

Figura 24: L'operatore di bordo ∂ collega dodici distinti generatori, mentre gli altri dodici non sono collegati.

tori sono collegati dall'operatore di bordo. Ora che conosciamo il complesso di catene $(C(\Gamma), \partial)$, possiamo calcolare la sua omologia $H(C(\Gamma), \partial)$, i cui generatori sono i cicli che non sono bordo di alcuna catena. I dodici generatori di $C(\Gamma)$ non collegati dall'operatore di bordo sono cicli, in quanto il loro bordo è nullo, e non sono bordi di alcuna catena; quindi essi sono generatori di $H(C(\Gamma), \partial)$. In Figura 25 ogni lettera corrisponde ad un generatore. Con la giustapposizione di lettere indicheremo la combinazione lineare a coefficienti unitari dei corrispondenti generatori. Ricordando che consideriamo \mathbb{Z}_2 -spazi vettoriali, i cicli in Figura 25 sono: **CD, CG, CH, DH, DG, GH, EF, EI, EL, FI, FL, IL, M, N**.

Alcuni cicli sono equivalenti o sono combinazione lineare di altri cicli, infatti **CD** \sim **EF** perchè $\partial(A) = CDEF$; **GH** \sim **IL** perchè $\partial(B) = GHIL$, **CH** = **CG** + **GH**, **EL** = **EI** + **IL**, **FL** = **FI** + **IL**, **DH** = **DG** + **GH**. Quindi ogni ciclo è combinazione lineare di **CD, CG, GH, EI, M, N**.

Abbiamo che **CD, CG, GH** e **EI** non sono bordo di alcuna catena, mentre $\partial(C) = M$ e $\partial(G) = N$. Dunque **CD, CG, GH** e **EI** sono quattro generatori di $H(C(\Gamma), \partial)$.

Pertanto:

$$\begin{aligned}
H(C(\Gamma), \partial) &\cong \mathbb{Z}_2[0, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})] \oplus \mathbb{Z}_2[-1, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})] \oplus \mathbb{Z}_2[-1, (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})] \oplus \\
&\oplus \mathbb{Z}_2^4[-2, (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})] \oplus \mathbb{Z}_2[-2, (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})] \oplus \mathbb{Z}_2[-2, (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})] \oplus \mathbb{Z}_2^2[-3, (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})] \oplus \\
&\oplus \mathbb{Z}_2^2[-3, (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})] \oplus \mathbb{Z}_2[-4, (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})] \cong \mathbb{Z}_2[0, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})] \otimes V_1^2 \otimes V_2^2;
\end{aligned}$$

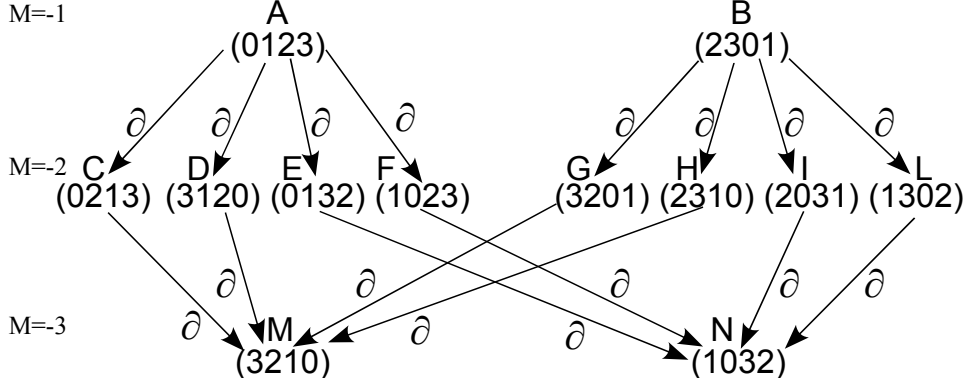


Figura 25: Schema dei dodici generatori di $C(\Gamma)$ collegati dall'operatore di bordo. Tutti i generatori hanno bigradazione di Alexander $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, mentre il grado di Maslov è indicato a sinistra.

dove $\mathbb{Z}_2[i, (j_1, j_2)]$ indica uno \mathbb{Z}_2 -spazio vettoriale a cui sono associati una gradazione di Maslov i e una bigradazione di Alexander (j_1, j_2) . Ricordiamo che con V_i indichiamo uno \mathbb{Z}_2 -spazio vettoriale di dimensione due, avente una base formata da un elemento con bigradazione di Maslov-Alexander $(0, (0, 0, \dots, 0))$ e da un elemento con bigradazione $(-1, -\vec{e}_i)$, dove \vec{e}_i indica l' i -esimo vettore della base canonica di \mathbb{R}^2

Per il Teorema 3.2.2, $H(C(\Gamma), \partial) \cong \widehat{HFL}(\vec{L}) \otimes V_1^{\otimes(n_1-1)} \otimes V_2^{\otimes(n_2-1)} = \widehat{HFL}(\vec{L}) \otimes V_1 \otimes V_2$, dunque $\widehat{HFL}(\vec{L}) \cong \mathbb{Z}_2[0, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})] \otimes V_1 \otimes V_2 \cong \mathbb{Z}_2[0, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})] \oplus \mathbb{Z}_2[-1, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})] \oplus \mathbb{Z}_2[-1, (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})] \oplus \mathbb{Z}_2[-2, (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})]$.

4.2 Link in $L(p, q)$

Come osservato in [Man13], in certi spazi lenticolari esistono coppie di link non equivalenti che hanno però stesso sollevamento a S^3 . In questa sezione calcoleremo le omologie \widehat{HFK} e \widehat{HFL} di alcune tra queste coppie di link.

Esempio 4.2.1. Consideriamo le grid presentation Γ_1 e Γ_2 descritte in Figura 26 dei due nodi orientati \vec{K}_1 e \vec{K}_2 in $L(5, 2)$.

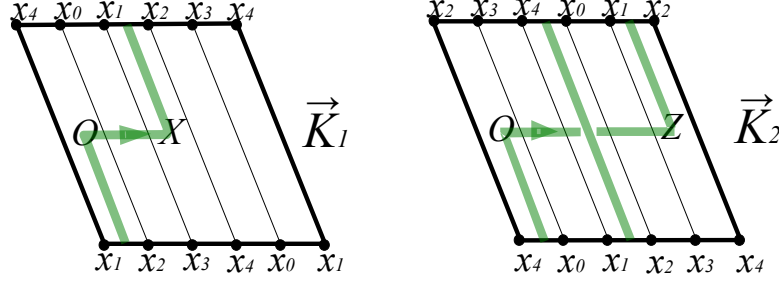


Figura 26: Γ_1 e Γ_2 hanno grid number $n=1$.

L'insieme G_1 dei generatori di $C(\Gamma_1)$, come l'insieme G_2 dei generatori di $C(\Gamma_2)$, è in corrispondenza biunivoca con $S_1 \times \mathbb{Z}_5$ e ha dunque cinque elementi che denotiamo con $\{\{[0], (0)\}, \{[0], (1)\}, \{[0], (2)\}, \{[0], (3)\}, \{[0], (4)\}\}$. Seguiamo il procedimento illustrato nella Sottosezione 3.3.3 per determinare la gradazione di spin di un generatore.

Per prima cosa notiamo che, sia nel caso di Γ_1 , che in quello di Γ_2 , abbiamo che $\{[0], (0)\} = x_\emptyset$. \vec{K}_1 e \vec{K}_2 sono nodi in $L(5, 2)$, quindi, usando l'equazione (3.4) per determinare i gradi di spin dei generatori:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\{[0], (4)\}) &\equiv [2 - 1 + (4 - 0)] \equiv 0 \pmod{5} \\ \mathbf{S}(\{[0], (0)\}) &\equiv [2 - 1 + (0 - 0)] \equiv 1 \pmod{5} \\ \mathbf{S}(\{[0], (1)\}) &\equiv [2 - 1 + (1 - 0)] \equiv 2 \pmod{5} \\ \mathbf{S}(\{[0], (2)\}) &\equiv [2 - 1 + (2 - 0)] \equiv 3 \pmod{5} \\ \mathbf{S}(\{[0], (3)\}) &\equiv [2 - 1 + (3 - 0)] \equiv 4 \pmod{5}. \end{aligned}$$

Ora, come in Figura 26, denotiamo i generatori con x_i , in modo che i indichi il grado di spin di x_i . Dunque:

$$\begin{aligned} x_0 &:= \{[0], (4)\} \\ x_1 &:= \{[0], (0)\} \\ x_2 &:= \{[0], (1)\} \\ x_3 &:= \{[0], (2)\} \\ x_4 &:= \{[0], (3)\}. \end{aligned}$$

Ora vogliamo determinare la gradazione di Maslov degli elementi di G_1 e quella degli elementi di G_2 . Innanzitutto, calcoliamo induttivamente il valore

della funzione d definita nel paragrafo 3.3.4:

$$\begin{aligned}
 d(p, q, q-1) &= d(5, 2, 1) = \left(\frac{10 - (2 + 1 - 5 - 2)^2}{4 \cdot 5 \cdot 2} \right) - d(2, 1, 1) = \\
 &= -\frac{6}{40} - d(2, 1, 1) = -\frac{3}{20} - \left(\frac{2 - (2 + 1 - 2 - 1)^2}{4 \cdot 2 \cdot 1} \right) - d(1, 0, 0) = \\
 &= -\frac{3}{20} - \frac{1}{4} - 0 = -\frac{2}{5}.
 \end{aligned}$$

Gli elementi x_i, O, X e Z , considerati come punti del quadrato unitario $[0, 1] \times [0, 1]$, hanno le seguenti coordinate nelle base canonica:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \left(\frac{4}{5}, 0 \right) & x_1 &= (0, 0) & x_2 &= \left(\frac{1}{5}, 0 \right) & x_3 &= \left(\frac{2}{5}, 0 \right) & x_4 &= \left(\frac{3}{5}, 0 \right) \\
 O &= \left(\frac{9}{10}, \frac{1}{2} \right) & X &= \left(\frac{3}{10}, \frac{1}{2} \right) & Z &= \left(\frac{7}{10}, \frac{1}{2} \right).
 \end{aligned}$$

I grid diagram Γ_1 e Γ_2 hanno grid number $n = 1$, quindi passando alla base $\left(\vec{v}_1 = \left(\frac{1}{np}, 0 \right) = \left(\frac{1}{5}, 0 \right), \vec{v}_2 = \left(-\frac{q}{np}, \frac{1}{n} \right) = \left(-\frac{2}{5}, 1 \right) \right)$ tramite la matrice di cambio di base $W = \begin{pmatrix} np & nq \\ 0 & n \end{pmatrix}$, otteniamo:

$$\begin{aligned}
 W(x_0) &= (4, 0) & W(x_1) &= (0, 0) & W(x_2) &= (1, 0) & W(x_3) &= (2, 0) & W(x_4) &= (3, 0) \\
 W(O) &= \left(\frac{11}{2}, \frac{1}{2} \right) & W(X) &= \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right) & W(Z) &= \left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Applichiamo ora la funzione $C_{p,q}$:

$$\begin{aligned}
 C_{p,q} \circ W(x_0) &= ((4 \bmod 5, 0), (1 \bmod 5, 1), (3 \bmod 5, 2), (0 \bmod 5, 3), (2 \bmod 5, 4)) \\
 C_{p,q} \circ W(x_1) &= ((0 \bmod 5, 0), (2 \bmod 5, 1), (4 \bmod 5, 2), (1 \bmod 5, 3), (3 \bmod 5, 4)) \\
 C_{p,q} \circ W(x_2) &= ((1 \bmod 5, 0), (3 \bmod 5, 1), (0 \bmod 5, 2), (2 \bmod 5, 3), (4 \bmod 5, 4)) \\
 C_{p,q} \circ W(x_3) &= ((2 \bmod 5, 0), (4 \bmod 5, 1), (1 \bmod 5, 2), (3 \bmod 5, 3), (0 \bmod 5, 4)) \\
 C_{p,q} \circ W(x_4) &= ((3 \bmod 5, 0), (0 \bmod 5, 1), (2 \bmod 5, 2), (4 \bmod 5, 3), (1 \bmod 5, 4))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{p,q} \circ W(O) &= \left(\left(\frac{1}{2} \bmod 5, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{5}{2} \bmod 5, \frac{3}{2} \right), \left(\frac{9}{2} \bmod 5, \frac{5}{2} \right), \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{3}{2} \bmod 5, \frac{7}{2} \right), \left(\frac{7}{2} \bmod 5, \frac{9}{2} \right) \right) \\
C_{p,q} \circ W(X) &= \left(\left(\frac{5}{2} \bmod 5, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{9}{2} \bmod 5, \frac{3}{2} \right), \left(\frac{3}{2} \bmod 5, \frac{5}{2} \right), \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{7}{2} \bmod 5, \frac{7}{2} \right), \left(\frac{1}{2} \bmod 5, \frac{9}{2} \right) \right) \\
C_{p,q} \circ W(Z) &= \left(\left(\frac{9}{2} \bmod 5, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{3}{2} \bmod 5, \frac{3}{2} \right), \left(\frac{7}{2} \bmod 5, \frac{5}{2} \right), \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{1}{2} \bmod 5, \frac{7}{2} \right), \left(\frac{5}{2} \bmod 5, \frac{9}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

Ricordando che nel paragrafo 3.3.4 abbiamo definito $\widetilde{W} = C_{p,q} \circ W$, e denotando con $J(Y_1, Y_2)$ la funzione $I(\widetilde{W}(Y_1), \widetilde{W}(Y_2))$, otteniamo:

$$\begin{array}{llllll}
J(O, O) = 7 & J(X, X) = 3 & J(Z, Z) = 3 & & & \\
J(x_0, x_0) = 3 & J(x_1, x_1) = 7 & J(x_2, x_2) = 7 & J(x_3, x_3) = 3 & J(x_4, x_4) = 5 & \\
J(x_0, O) = 10 & J(x_1, O) = 12 & J(x_2, O) = 10 & J(x_3, O) = 9 & J(x_4, O) = 9 & \\
J(O, x_0) = 5 & J(O, x_1) = 7 & J(O, x_2) = 5 & J(O, x_3) = 4 & J(O, x_4) = 4 & \\
J(x_0, X) = 7 & J(x_1, X) = 8 & J(x_2, X) = 10 & J(x_3, X) = 8 & J(x_4, X) = 7 & \\
J(X, x_0) = 2 & J(X, x_1) = 3 & J(X, x_2) = 5 & J(X, x_3) = 3 & J(X, x_4) = 2 & \\
J(x_0, Z) = 8 & J(x_1, Z) = 8 & J(x_2, Z) = 9 & J(x_3, Z) = 6 & J(x_4, Z) = 9 & \\
J(Z, x_0) = 3 & J(Z, x_1) = 3 & J(Z, x_2) = 4 & J(Z, x_3) = 1 & J(Z, x_4) = 4. &
\end{array}$$

Adesso, utilizzando l'equazione (3.5), possiamo calcolare il grado di Maslov dei generatori:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(x_0) &= \mathbf{M}_{\mathbb{O}}(x_0) = \frac{1}{5}(3 - 10 - 5 + 7 + 1) - \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = -\frac{2}{5} \\
\mathbf{M}(x_1) &= \mathbf{M}_{\mathbb{O}}(x_1) = \frac{1}{5}(7 - 12 - 7 + 7 + 1) - \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = -\frac{2}{5} \\
\mathbf{M}(x_2) &= \mathbf{M}_{\mathbb{O}}(x_2) = \frac{1}{5}(7 - 10 - 5 + 7 + 1) - \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{2}{5} \\
\mathbf{M}(x_3) &= \mathbf{M}_{\mathbb{O}}(x_3) = \frac{1}{5}(3 - 9 - 4 + 7 + 1) - \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = 0 \\
\mathbf{M}(x_4) &= \mathbf{M}_{\mathbb{O}}(x_4) = \frac{1}{5}(5 - 9 - 4 + 7 + 1) - \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Notiamo che, poiché in Γ_1 e in Γ_2 la O occupa la stessa cella, il grado di Maslov dei generatori di $C(\Gamma_1)$ coincide con quello dei generatori di $C(\Gamma_2)$.

Ripetendo lo stesso procedimento, calcoliamo la gradazione di Maslov rispetto a X e quella rispetto a Z :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\mathbb{X}}(x_0) &= \frac{1}{5}(3 - 7 - 2 + 3 + 1) - \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = 0 \\
\mathbf{M}_{\mathbb{X}}(x_1) &= \frac{1}{5}(7 - 8 - 3 + 3 + 1) - \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{2}{5} \\
\mathbf{M}_{\mathbb{X}}(x_2) &= \frac{1}{5}(7 - 10 - 5 + 3 + 1) - \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = -\frac{2}{5} \\
\mathbf{M}_{\mathbb{X}}(x_3) &= \frac{1}{5}(3 - 8 - 3 + 3 + 1) - \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = -\frac{2}{5} \\
\mathbf{M}_{\mathbb{X}}(x_4) &= \frac{1}{5}(5 - 7 - 2 + 3 + 1) - \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{2}{5} \\
\mathbf{M}_{\mathbb{Z}}(x_0) &= \frac{1}{5}(3 - 8 - 3 + 3 + 1) - \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = -\frac{2}{5} \\
\mathbf{M}_{\mathbb{Z}}(x_1) &= \frac{1}{5}(7 - 8 - 3 + 3 + 1) - \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{2}{5} \\
\mathbf{M}_{\mathbb{Z}}(x_2) &= \frac{1}{5}(7 - 9 - 4 + 3 + 1) - \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = 0 \\
\mathbf{M}_{\mathbb{Z}}(x_3) &= \frac{1}{5}(3 - 6 - 1 + 3 + 1) - \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{2}{5} \\
\mathbf{M}_{\mathbb{Z}}(x_4) &= \frac{1}{5}(5 - 9 - 4 + 3 + 1) - \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = -\frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Ora sfruttiamo l'equazione (3.6) per calcolare il grado di Alexander dei generatori di $C(\Gamma_1)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(x_0) &= \frac{1}{2}(\mathbf{M}_{\mathbb{O}}(x_0) - \mathbf{M}_{\mathbb{X}}(x_0) - (n - 1)) = \frac{1}{2}(-\frac{2}{5} - 0 - 0) = -\frac{1}{5} \\
\mathbf{A}(x_1) &= \frac{1}{2}(-\frac{2}{5} - \frac{2}{5}) = -\frac{2}{5} \\
\mathbf{A}(x_2) &= \frac{1}{2}(\frac{2}{5} + \frac{2}{5}) = \frac{2}{5} \\
\mathbf{A}(x_3) &= \frac{1}{2}(0 + \frac{2}{5}) = \frac{1}{5} \\
\mathbf{A}(x_4) &= \frac{1}{2}(\frac{2}{5} - \frac{2}{5}) = 0.
\end{aligned}$$

D'altra parte i generatori di $C(\Gamma_2)$ hanno grado di Alexander:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(x_0) &= \frac{1}{2}(-\frac{2}{5} + \frac{2}{5} - 0) = 0 \\ \mathbf{A}(x_1) &= \frac{1}{2}(-\frac{2}{5} - \frac{2}{5}) = -\frac{2}{5} \\ \mathbf{A}(x_2) &= \frac{1}{2}(\frac{2}{5} + 0) = \frac{1}{5} \\ \mathbf{A}(x_3) &= \frac{1}{2}(0 - \frac{2}{5}) = -\frac{1}{5} \\ \mathbf{A}(x_4) &= \frac{1}{2}(\frac{2}{5} + \frac{2}{5}) = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

Dopo aver stabilito le tre gradazioni di ciascun generatore cerchiamo le coppie di generatori collegate dall'operatore di bordo, per poi calcolare $H(C(\Gamma_1), \partial)$. In questo esempio ogni generatore di $C(\Gamma_1)$ ha grado di spin differente; ma l'operatore di bordo ∂ conserva il grado di spin e ciò implica che i cinque generatori non siano collegati tra loro dall'operatore di bordo. Per calcolare l'omologia di un complesso di catene utilizziamo la definizione usuale, cioè cerchiamo cicli che non siano bordo di alcuna catena. In questo caso l'operatore di bordo è nullo, dunque ogni generatore di $C(\Gamma_1)$ è ciclo e non può essere bordo di alcuna catena. Quindi ogni generatore di $C(\Gamma_1)$ è anche generatore di $H(C(\Gamma_1), \partial)$ e dunque:

$$\begin{aligned}H(C(\Gamma_1), \partial) &\cong \mathbb{Z}_2[0, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[1, -\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[2, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[3, 0, \frac{1}{5}] \oplus \\ &\oplus \mathbb{Z}_2[4, \frac{2}{5}, 0];\end{aligned}$$

dove $\mathbb{Z}_2[i, j, k]$ indica uno \mathbb{Z}_2 -spazio vettoriale a cui sono associati un grado di spin i , un grado di Maslov j e un grado di Alexander k .

Dal Teorema 3.3.26 segue che $\widehat{HFK}(\vec{K}_1) \cong H(C(\Gamma_1), \partial)$.

Similmente, anche l'operatore di bordo in $H(C(\Gamma_2), \partial)$ è nullo, perciò:

$$\begin{aligned}H(C(\Gamma_2), \partial) &\cong \mathbb{Z}_2[0, -\frac{2}{5}, 0] \oplus \mathbb{Z}_2[1, -\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[2, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[3, 0, -\frac{1}{5}] \oplus \\ &\oplus \mathbb{Z}_2[4, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}].\end{aligned}$$

Dal Teorema 3.3.26 segue che $\widehat{HFK}(\vec{K}_2) \cong H(C(\Gamma_2), \partial)$, dunque $\widehat{HFK}(\vec{K}_1) \neq \widehat{HFK}(\vec{K}_2)$. Notiamo infine (vedi Figura 27) che sollevando \vec{K}_1 e \vec{K}_2 ad S^3 con il procedimento illustrato nel Teorema 2.3.1, otteniamo due nodi con stessa orientazione ed equivalenti al nodo banale.

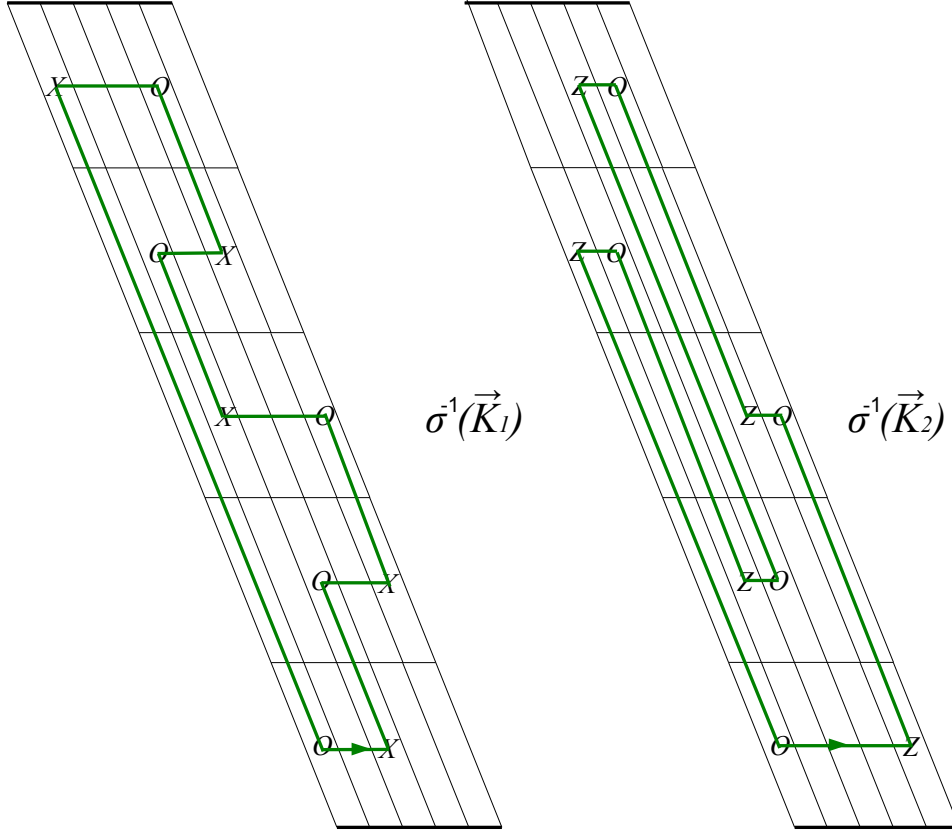
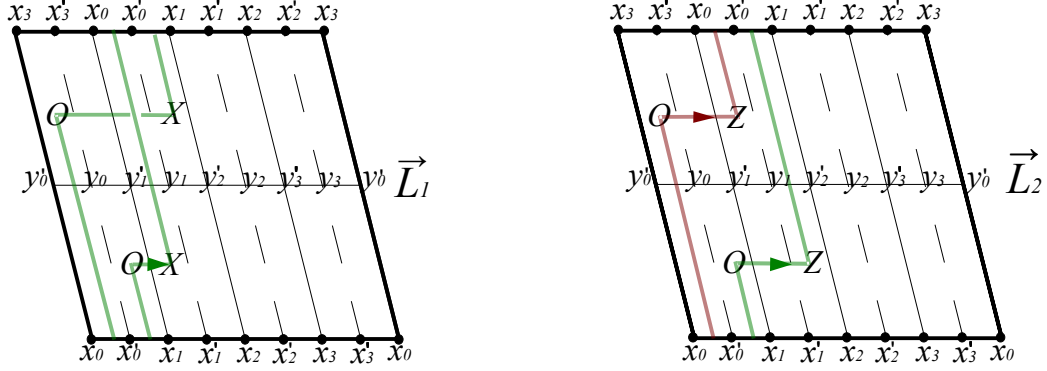


Figura 27: Sollevamenti di \vec{K}_1 e di \vec{K}_2 . Chiaramente entrambi i sollevamenti sono equivalenti al nodo banale in S^3 .

Esempio 4.2.2. Consideriamo le grid presentation Γ_1 e Γ_2 descritte in Figura 28 dei link orientati \vec{L}_1 e \vec{L}_2 in $L(4, 1)$.

I link \vec{L}_1 e \vec{L}_2 hanno rispettivamente una e due componenti. Con una semplice verifica si può notare che entrambi i link si sollevano in S^3 al link di Hopf. Calcoliamo le omologie $\widehat{HFK}(\vec{L}_1)$ e $\widehat{HFL}(\vec{L}_2)$.

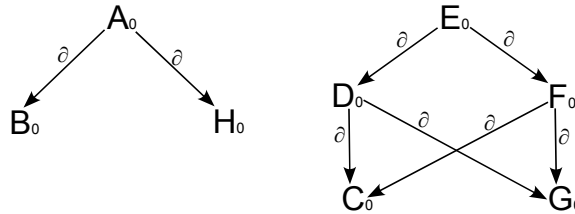
Facendo riferimento alla Figura 28 e identificando l'insieme dei generatori di $C(\Gamma_1)$ con l'insieme formato dalle coppie $x_i y_j$ e dalle coppie $x'_i y'_j$ per $i, j \in \{1, \dots, p\}$, abbiamo che $\mathbf{S}(x_i y_j) \equiv i + j \equiv \mathbf{S}(x'_i y'_j) \pmod{p}$. Implementando il procedimento descritto nell'Esempio 4.2.1, possiamo avvalerci dell'aiuto di un computer per calcolare la gradazione di Maslov/Alexander dei generatori di $C(\Gamma_1)$.

Figura 28: Γ_1 e Γ_2 hanno grid number $n=2$.

	A_0	B_0	C_0	D_0	E_0	F_0	G_0	H_0
$S = 0$	$x_0 y_0$	$x'_0 y'_0$	$x_1 y_3$	$x'_1 y'_3$	$x_2 y_2$	$x'_2 y'_2$	$x_3 y_1$	$x'_3 y'_1$
M	$\frac{3}{-4}$	$\frac{7}{-4}$	$\frac{3}{-4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{-4}$	$\frac{7}{-4}$
A	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$

Una volta calcolate le gradazioni cerchiamo di capire quali generatori sono collegati dall'operatore di bordo. Poiché l'operatore di bordo preserva il grado di spin e il grado di Alexander, mentre fa diminuire di 1 il grado di Maslov, due generatori sono candidati ad essere collegati se hanno stesso grado di spin, stesso grado di Alexander e se la differenza tra i rispettivi gradi di Maslov è 1. Se \mathbf{x} e \mathbf{y} sono due generatori con tali caratteristiche, consideriamo l'insieme $N_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$ dei parallelogrammi ammissibili che li collegano e che non contengono né O né X . Se $\#(N_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) \equiv 1 \pmod{2}$ c'è l'operatore di bordo tra \mathbf{x} e \mathbf{y} , altrimenti \mathbf{x} e \mathbf{y} non sono collegati.

In questo caso abbiamo:



Ora non ci resta che calcolare l'omologia $H(C(\Gamma_1), \partial)$. I generatori B_0 , H_0 , C_0 , G_0 sono cicli e anche $D_0 F_0$ è un ciclo, poiché consideriamo degli \mathbb{Z}_2 -spazi vettoriali.

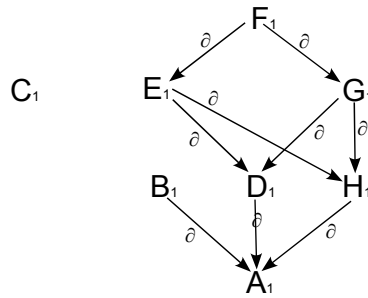
Abbiamo che B_0 , H_0 , C_0 e G_0 non sono bordo di alcuna catena, mentre $D_0 F_0$ è bordo di E_0 .

Notiamo che B_0 è equivalente a H_0 perchè $B_0 H_0$ è bordo di A_0 . Allo stesso modo C_0 e G_0 sono bordo di D_0 , quindi $C_0 \sim G_0$.

Dunque B_0 e C_0 sono due generatori di $H(C(\Gamma_1), \partial)$ aventi grado di spin nullo.

Il generatore B_0 ha bigradazione $(M, A) = \left(-\frac{7}{4}, -\frac{3}{2}\right)$, mentre C_0 ha bigradazione $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$.

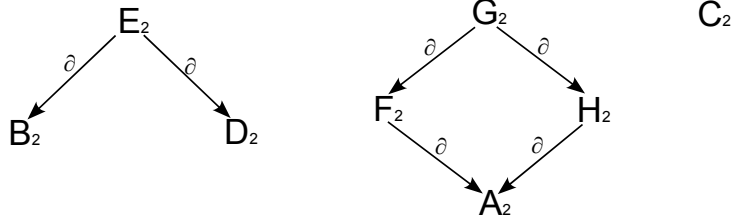
	A_1	B_1	C_1	D_1	E_1	F_1	G_1	H_1
$S = 1$	$x_0 y_1$	$x'_0 y'_1$	$x_1 y_0$	$x'_1 y'_0$	$x_2 y_3$	$x'_2 y'_3$	$x_3 y_2$	$x'_2 y'_1$
M	-2	-1	0	-1	0	1	0	-1
A	-1	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1



Le catene C_1 , $E_1 G_1$, $B_1 D_1$, $B_1 H_1$ e A_1 sono cicli. Visto che C_1 e $B_1 D_1 \sim B_1 H_1$ non sono bordo di alcuna catena, allora sono due generatori di $H(C(\Gamma_1), \partial)$ aventi grado di spin 1.

Il generatore C_1 ha bigradazione $(M, A) = (0, 0)$ mentre $B_1 D_1$ ha bigradazione $(-1, -1)$.

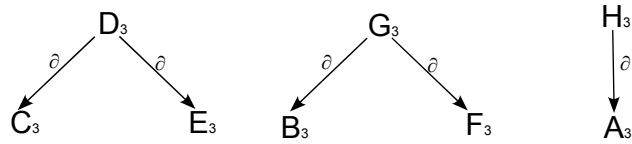
	A_2	B_2	C_2	D_2	E_2	F_2	G_2	H_2
$S = 2$	x_0y_2	$x'_0y'_2$	x_1y_1	$x'_1y'_1$	x_2y_0	$x'_2y'_0$	x_3y_3	$x'_3y'_3$
M	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
A	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$



Le catene B_2, D_2, F_2H_2, A_2 e C_2 sono cicli. Visto che $B_2 \sim D_2$ e C_2 non sono bordo di alcuna catena, allora sono due generatori di $H(C(\Gamma_1), \partial)$ aventi grado di spin 2.

Il generatore B_2 ha bigradazione $(M, A) = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$, mentre C_2 ha bigradazione $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

	A_3	B_3	C_3	D_3	E_3	F_3	G_3	H_3
$S = 3$	x_0y_3	$x'_0y'_3$	x_1y_2	$x'_1y'_2$	x_2y_1	$x'_2y'_1$	x_3y_0	$x'_3y'_0$
M	-2	-1	0	1	0	-1	0	-1
A	-2	-1	0	0	0	-1	-1	-2



I generatori C_3, E_3, B_3, F_3 e A_3 sono cicli. Visto che $C_3 \sim E_3$ e $B_3 \sim F_3$ non sono bordo di alcuna catena, allora sono due generatori di $H(C(\Gamma_1), \partial)$ aventi grado di spin 3.

Il generatore \mathbf{B}_3 ha bigradazione $(\mathbf{M}, \mathbf{A}) = (-1, -1)$ mentre \mathbf{C}_3 ha bigradazione $(0, 0)$. In conclusione:

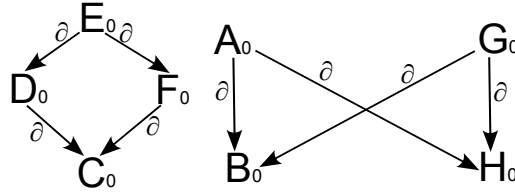
$$H(C(\Gamma_1), \partial) \cong \mathbb{Z}_2[0, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z}_2[0, -\frac{7}{4}, -\frac{3}{2}] \oplus \mathbb{Z}_2[1, 0, 0] \oplus \mathbb{Z}_2[1, -1, -1] \oplus \\ \oplus \mathbb{Z}_2[2, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z}_2[2, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z}_2[3, 0, 0] \oplus \mathbb{Z}_2[3, -1, -1].$$

Per il Teorema 3.3.26, $H(C(\Gamma_1), \partial) \cong \widehat{HFK}(\vec{L}_1) \otimes V$, dunque:

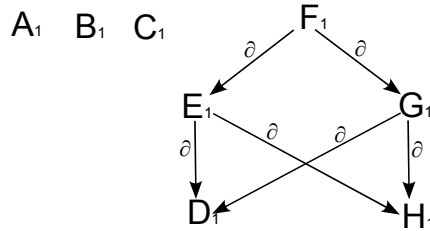
$$\widehat{HFK}(\vec{L}_1) \cong \mathbb{Z}_2[0, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z}_2[1, 0, 0] \oplus \mathbb{Z}_2[2, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z}_2[3, 0, 0].$$

Ora calcoliamo l'omologia $\widehat{HFL}(\vec{L}_2)$.

Le gradazioni di spin e di Maslov dei generatori di $C(\Gamma_2)$ sono uguali a quelle dei generatori di $C(\Gamma_1)$. Con l'aiuto di un calcolatore troviamo la bigradazione di Alexander e poi cerchiamo di capire quali generatori sono collegati dall'operatore di bordo.



Le catene $\mathbf{D}_0\mathbf{F}_0$, \mathbf{C}_0 , $\mathbf{A}_0\mathbf{G}_0$, \mathbf{B}_0 , e \mathbf{H}_0 (vedi Tabella 0) sono cicli. Visto che $\mathbf{A}_0\mathbf{G}_0$ e $\mathbf{B}_0 \sim \mathbf{H}_0$ non sono bordo di alcuna catena, allora sono due generatori di $H(C(\Gamma_2), \partial)$ aventi grado di spin 0.



Le catene \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , \mathbf{C}_1 , $\mathbf{E}_1\mathbf{G}_1$, \mathbf{D}_1 e \mathbf{H}_1 (vedi Tabella 1) sono cicli. Poiché \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , \mathbf{C}_1 e $\mathbf{D}_1 \sim \mathbf{H}_1$ non sono bordo di alcuna catena, allora sono quattro generatori di $H(C(\Gamma_2), \partial)$ aventi grado di spin 1.

	A_0	B_0	C_0	D_0	E_0	F_0	G_0	H_0
$S=0$	x_0y_0	$x'_0y'_0$	x_1y_3	$x'_1y'_3$	x_2y_2	$x'_2y'_2$	x_3y_1	$x'_3y'_1$
M	$\frac{3}{-4}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{3}{-4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{7}{-4}$
A	$(-\frac{3}{8}, -\frac{7}{8})$	$(-\frac{3}{8}, -\frac{7}{8})$	$(-\frac{3}{8}, \frac{1}{8})$	$(-\frac{3}{8}, \frac{1}{8})$	$(-\frac{3}{8}, \frac{1}{8})$	$(-\frac{3}{8}, \frac{1}{8})$	$(-\frac{3}{8}, -\frac{7}{8})$	$(-\frac{3}{8}, -\frac{7}{8})$

Tabella 0

	A_1	B_1	C_1	D_1	E_1	F_1	G_1	H_1
$S=1$	x_0y_1	$x'_0y'_1$	x_1y_0	$x'_1y'_0$	x_2y_3	$x'_2y'_3$	x_3y_2	$x'_3y'_1$
M	-2	-1	0	-1	0	1	0	-1
A	$(-\frac{5}{8}, -\frac{9}{8})$	$(\frac{3}{8}, -\frac{9}{8})$	$(\frac{3}{8}, -\frac{1}{8})$	$(-\frac{5}{8}, -\frac{1}{8})$	$(-\frac{5}{8}, -\frac{1}{8})$	$(-\frac{5}{8}, -\frac{1}{8})$	$(-\frac{5}{8}, -\frac{1}{8})$	$(-\frac{5}{8}, -\frac{1}{8})$

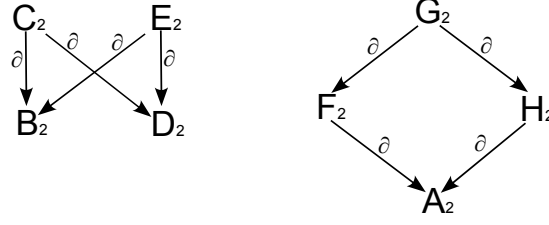
Tabella 1

	A_2	B_2	C_2	D_2	E_2	F_2	G_2	H_2
$S = 2$	$x_0 y_2$	$x'_0 y'_2$	$x_1 y_1$	$x'_1 y'_1$	$x_2 y_0$	$x'_2 y'_0$	$x_3 y_3$	$x'_3 y'_3$
M	$\frac{7}{-4}$	$\frac{3}{-4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{-4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{-4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{-4}$
A	$(-\frac{7}{8}, -\frac{3}{8})$	$(\frac{1}{8}, -\frac{3}{8})$	$(\frac{1}{8}, -\frac{3}{8})$	$(\frac{1}{8}, -\frac{3}{8})$	$(\frac{1}{8}, -\frac{3}{8})$	$(\frac{7}{8}, -\frac{3}{8})$	$(-\frac{7}{8}, -\frac{3}{8})$	$(\frac{7}{8}, -\frac{3}{8})$

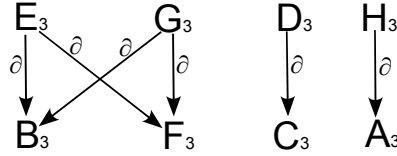
Tabella 2

	A_3	B_3	C_3	D_3	E_3	F_3	G_3	H_3
$S = 3$	$x_0 y_3$	$x'_0 y'_3$	$x_1 y_2$	$x'_1 y'_2$	$x_2 y_1$	$x'_2 y'_1$	$x_3 y_0$	$x'_3 y'_0$
M	-2	-1	0	1	0	-1	0	-1
A	$(-\frac{9}{8}, -\frac{5}{8})$	$(-\frac{1}{8}, -\frac{5}{8})$	$(-\frac{1}{8}, \frac{3}{8})$	$(-\frac{1}{8}, \frac{3}{8})$	$(-\frac{1}{8}, -\frac{5}{8})$	$(-\frac{1}{8}, -\frac{5}{8})$	$(-\frac{1}{8}, -\frac{5}{8})$	$(-\frac{9}{8}, -\frac{5}{8})$

Tabella 3



Le catene C_2E_2 , B_2 , D_2 , F_2H_2 e A_2 (vedi Tabella 2) sono cicli. Poiché C_2E_2 e $B_2 \sim D_2$ non sono bordo di alcuna catena, allora sono due generatori di $H(C(\Gamma_2), \partial)$ aventi grado di spin 2.



Le catene E_3G_3 , B_3 , F_3 , C_3 e A_3 (vedi Tabella 3) sono cicli. Poiché E_3G_3 e $B_3 \sim F_3$ non sono bordo di alcuna catena, allora sono due generatori di $H(C(\Gamma_2), \partial)$ aventi grado di spin 3.

Per il Teorema 3.4.2, $H(C(\Gamma_2), \partial) \cong \widehat{HFL}(\vec{L}_2)$, dunque:

$$\begin{aligned} \widehat{HFL}(\vec{L}_2) \cong H(C(\Gamma_2), \partial) \cong \mathbb{Z}_2 \left[0, -\frac{3}{4}, \left(-\frac{3}{8}, -\frac{7}{8}\right) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[0, -\frac{7}{4}, \left(-\frac{3}{8}, -\frac{7}{8}\right) \right] \oplus \\ \oplus \mathbb{Z}_2 \left[1, -2, \left(-\frac{5}{8}, -\frac{9}{8}\right) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[1, -1, \left(\frac{3}{8}, -\frac{9}{8}\right) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[1, 0, \left(\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}\right) \right] \oplus \\ \oplus \mathbb{Z}_2 \left[1, -1, \left(-\frac{5}{8}, -\frac{1}{8}\right) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[2, \frac{1}{4}, \left(\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[2, -\frac{3}{4}, \left(\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right) \right] \oplus \\ \oplus \mathbb{Z}_2 \left[3, 0, \left(-\frac{1}{8}, -\frac{5}{8}\right) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[3, -1, \left(-\frac{1}{8}, -\frac{5}{8}\right) \right]. \end{aligned}$$

dove $\mathbb{Z}_2[i, j, (k_1, k_2)]$ indica uno \mathbb{Z}_2 -spazio vettoriale a cui sono associati un grado di spin i , un grado di Maslov j e una bigradazione di Alexander (k_1, k_2) . Il prossimo esempio mostra che \widehat{HFK} è sensibile all'orientazione.

Esempio 4.2.3. Consideriamo le grid presentation Γ_1 e $-\Gamma_1$ dei due nodi orientati \vec{K}_1 e $-\vec{K}_1$ in $L(5, 2)$ (vedi Figura 29).

Ricordiamo che, scambiando la posizione degli elementi di \mathbb{O} con la posizione degli elementi di \mathbb{X} , otteniamo una grid presentation del nodo che ha orientazione opposta a quello iniziale.

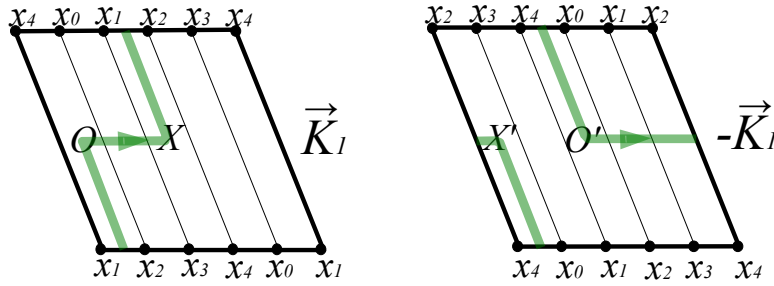


Figura 29: \vec{K}_1 e $-\vec{K}_1$ sono nodi equivalenti a meno dell'orientazione.

Abbiamo già calcolato $\widehat{HFK}(\vec{K}_1)$; vogliamo calcolare $\widehat{HFK}(-\vec{K}_1)$. Numeriamo, come in Figura 29, i generatori di $C(-\Gamma_1)$ in base al grado di spin. Cambiando gli indici in modo opportuno e sfruttando i calcoli dell'esempio precedente abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathbb{O}'}(x_0) &= -\frac{2}{5} & \mathbf{M}_{\mathbb{O}'}(x_1) &= -\frac{2}{5} & \mathbf{M}_{\mathbb{O}'}(x_2) &= \frac{2}{5} & \mathbf{M}_{\mathbb{O}'}(x_3) &= 0 & \mathbf{M}_{\mathbb{O}'}(x_4) &= \frac{2}{5} \\ \mathbf{M}_{\mathbb{X}'}(x_0) &= \frac{2}{5} & \mathbf{M}_{\mathbb{X}'}(x_1) &= 0 & \mathbf{M}_{\mathbb{X}'}(x_2) &= \frac{2}{5} & \mathbf{M}_{\mathbb{X}'}(x_3) &= -\frac{2}{5} & \mathbf{M}_{\mathbb{X}'}(x_4) &= -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Dunque i gradi di Alexander sono:

$$\mathbf{A}(x_0) = -\frac{2}{5} \quad \mathbf{A}(x_1) = -\frac{1}{5} \quad \mathbf{A}(x_2) = 0 \quad \mathbf{A}(x_3) = \frac{1}{5} \quad \mathbf{A}(x_4) = \frac{2}{5}.$$

Come prima tutti i differenziali sono nulli, dunque:

$$\begin{aligned} H(C(-\Gamma_1), \partial) &\cong \mathbb{Z}_2[0, -\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[1, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[2, \frac{2}{5}, 0] \oplus \mathbb{Z}_2[3, 0, \frac{1}{5}] \oplus \\ &\oplus \mathbb{Z}_2[4, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}]. \end{aligned}$$

Riassumendo, per il Teorema 3.3.26:

$$\widehat{HFK}(-\vec{K}_1) \cong \mathbb{Z}_2[0, -\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[1, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[2, \frac{2}{5}, 0] \oplus \mathbb{Z}_2[3, 0, \frac{1}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[4, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}]$$

mentre era:

$$\widehat{HFK}(\vec{K}_1) \cong \mathbb{Z}_2[0, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[1, -\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[2, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[3, 0, \frac{1}{5}] \oplus \mathbb{Z}_2[4, \frac{2}{5}, 0].$$

Infine, vediamo un esempio in cui consideriamo due link.

Esempio 4.2.4. Consideriamo le grid presentation Γ_1 e Γ_2 illustrate in Figura 30 dei due link orientati \vec{M}_1 e \vec{M}_2 in $L(5, 2)$.

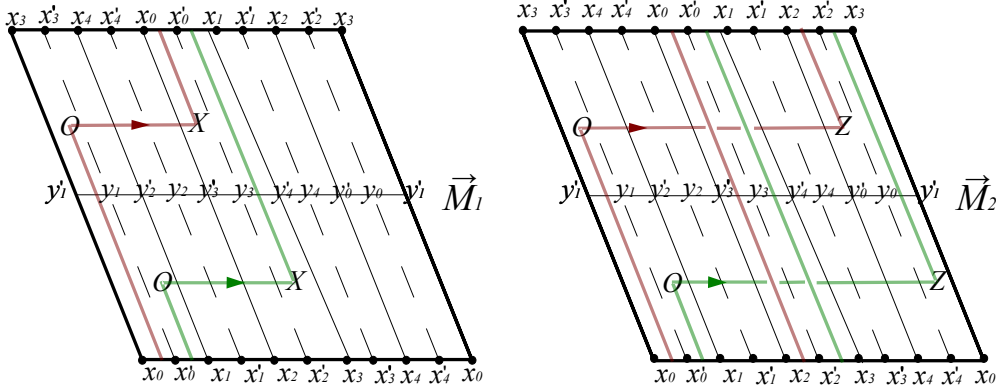
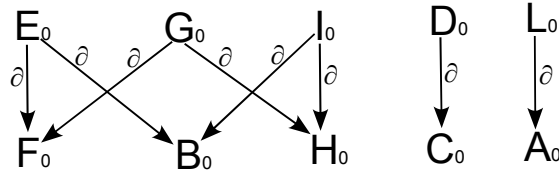


Figura 30: Γ_1 e Γ_2 hanno grid number $n=2$.

I link \vec{M}_1 e \vec{M}_2 hanno entrambi due componenti. Calcoliamo l'omologia $\widehat{HFL}(\vec{M}_1)$.

	A_0	B_0	C_0	D_0	E_0	F_0
$S = 0$	$x_0 y_0$	$x'_0 y'_0$	$x_1 y_4$	$x'_1 y'_4$	$x_2 y_3$	$x'_2 y'_3$
M	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$
A	$(-\frac{6}{5}, -\frac{3}{5})$	$(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5})$	$(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$	$(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$	$(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5})$	$(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5})$

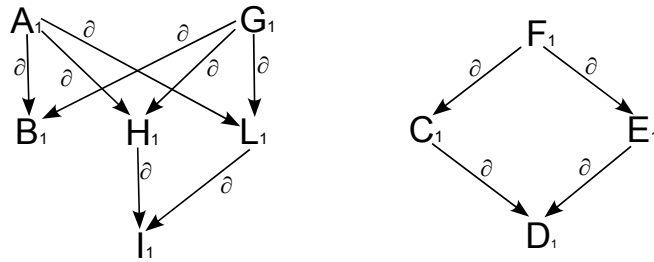
	G_0	H_0	I_0	L_0
$S = 0$	$x_3 y_2$	$x'_3 y'_2$	$x_4 y_1$	$x'_4 y'_1$
M	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$
A	$(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5})$	$(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5})$	$(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5})$	$(-\frac{6}{5}, -\frac{3}{5})$



Le catene $E_0 G_0 I_0$ e $B_0 \sim F_0 \sim H_0$ sono due generatori di $H(C(\Gamma_1), \partial)$ aventi grado di spin 0.

	A_1	B_1	C_1	D_1	E_1	F_1
$S = 1$	$x_0 y_1$	$x'_0 y'_1$	$x_1 y_0$	$x'_1 y'_0$	$x_2 y_4$	$x'_2 y'_4$
M	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
A	$(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5})$	$(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5})$	$(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$	$(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$	$(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$	$(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$

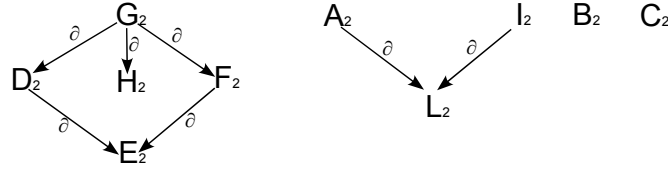
	G_1	H_1	I_1	L_1
$S = 1$	$x_3 y_3$	$x'_3 y'_3$	$x_4 y_2$	$x'_4 y'_2$
M	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{7}{5}$
A	$(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5})$	$(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5})$	$(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5})$	$(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5})$



Le catene $\mathbf{A}_1\mathbf{G}_1$ e $\mathbf{B}_1\sim\mathbf{H}_1\mathbf{L}_1$ sono due generatori di $H(C(\Gamma_1), \partial)$ aventi grado di spin 1.

	\mathbf{A}_2	\mathbf{B}_2	\mathbf{C}_2	\mathbf{D}_2	\mathbf{E}_2	\mathbf{F}_2
$\mathbf{S} = 2$	x_0y_2	$x'_0y'_2$	x_1y_1	$x'_1y'_1$	x_2y_0	$x'_2y'_0$
\mathbf{M}	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{3}{5}$
\mathbf{A}	$(-\frac{3}{5}, -1)$	$(\frac{2}{5}, -1)$	$(\frac{2}{5}, 0)$	$(-\frac{3}{5}, 0)$	$(-\frac{3}{5}, 0)$	$(-\frac{3}{5}, 0)$

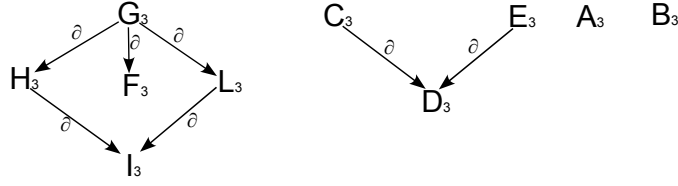
	\mathbf{G}_2	\mathbf{H}_2	\mathbf{I}_2	\mathbf{L}_2
$\mathbf{S} = 2$	x_3y_4	$x'_3y'_4$	x_4y_3	$x'_4y'_3$
\mathbf{M}	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{13}{5}$
\mathbf{A}	$(-\frac{3}{5}, 0)$	$(-\frac{3}{5}, 0)$	$(-\frac{3}{5}, -1)$	$(-\frac{3}{5}, -1)$



Le catene $\mathbf{A}_2\mathbf{I}_2$, \mathbf{B}_2 , \mathbf{C}_2 e $\mathbf{H}_2\sim\mathbf{B}_2\mathbf{L}_2$ sono quattro generatori di $H(C(\Gamma_1), \partial)$ aventi grado di spin 2.

	\mathbf{A}_3	\mathbf{B}_3	\mathbf{C}_3	\mathbf{D}_3	\mathbf{E}_3	\mathbf{F}_3
$\mathbf{S} = 3$	x_3y_0	$x'_3y'_0$	x_1y_2	$x'_1y'_2$	x_2y_1	$x'_2y'_1$
\mathbf{M}	-2	-1	0	-1	0	-1
\mathbf{A}	$(-\frac{4}{5}, -\frac{6}{5})$	$(\frac{1}{5}, -\frac{6}{5})$	$(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$	$(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$	$(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$	$(-\frac{4}{5}, -\frac{1}{5})$

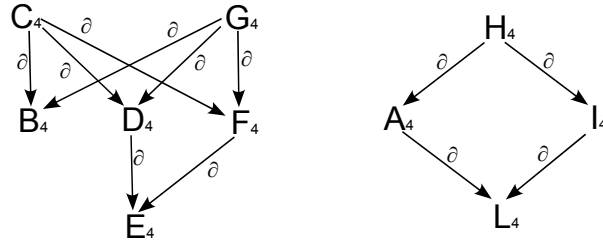
	\mathbf{G}_3	\mathbf{H}_3	\mathbf{I}_3	\mathbf{L}_3
$\mathbf{S} = 3$	x_3y_0	$x'_3y'_0$	x_4y_4	$x'_4y'_4$
\mathbf{M}	0	-1	-2	-1
\mathbf{A}	$(-\frac{4}{5}, -\frac{1}{5})$	$(-\frac{4}{5}, -\frac{1}{5})$	$(-\frac{4}{5}, -\frac{1}{5})$	$(-\frac{4}{5}, -\frac{1}{5})$



Le catene A_3, B_3, C_3E_3 e $F_3 \sim H_3L_3$ sono quattro generatori di $H(C(\Gamma_1), \partial)$ aventi grado di spin 3.

	A_4	B_4	C_4	D_4	E_4	F_4
$S = 4$	x_0y_4	$x'_0y'_4$	x_1y_3	$x'_1y'_3$	x_2y_2	$x'_2y'_2$
M	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{3}{5}$
A	$(-1, -\frac{2}{5})$	$(0, -\frac{2}{5})$	$(0, -\frac{2}{5})$	$(0, -\frac{2}{5})$	$(0, -\frac{2}{5})$	$(0, -\frac{2}{5})$

	G_4	H_4	I_4	L_4
$S = 4$	x_3y_1	$x'_3y'_1$	x_4y_0	$x'_4y'_0$
M	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{13}{5}$
A	$(0, -\frac{2}{5})$	$(-1, -\frac{2}{5})$	$(-1, -\frac{2}{5})$	$(-1, -\frac{2}{5})$



Le catene C_4G_4 e $B_4 \sim D_4F_4$ sono due generatori di $H(C(\Gamma_1), \partial)$ aventi grado di spin 4.

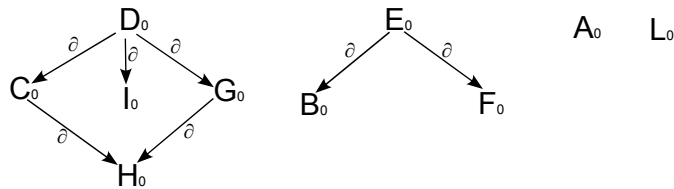
Per il Teorema 3.4.2 $H(C(\Gamma_1), \partial) \cong \widehat{HFL}(\overrightarrow{M_1})$, dunque:

$$\begin{aligned} \widehat{HFL}(\overrightarrow{M_1}) \cong H(C(\Gamma_1), \partial) \cong \mathbb{Z}_2 \left[0, -\frac{2}{5}, \left(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[0, -\frac{7}{5}, \left(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right) \right] \oplus \\ \oplus \mathbb{Z}_2 \left[1, -\frac{2}{5}, \left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[1, -\frac{7}{5}, \left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[2, -\frac{8}{5}, \left(-\frac{3}{5}, -1\right) \right] \oplus \\ \oplus \mathbb{Z}_2 \left[2, -\frac{3}{5}, \left(\frac{2}{5}, -1\right) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[2, \frac{2}{5}, \left(\frac{2}{5}, 0\right) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[2, -\frac{3}{5}, \left(-\frac{3}{5}, 0\right) \right] \oplus \\ \oplus \mathbb{Z}_2 \left[3, -2, \left(-\frac{4}{5}, -\frac{6}{5}\right) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[3, -1, \left(\frac{1}{5}, -\frac{6}{5}\right) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[3, 0, \left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right) \right] \oplus \\ \oplus \mathbb{Z}_2 \left[3, -1, \left(-\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}\right) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[4, \frac{2}{5}, \left(0, -\frac{2}{5}\right) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[4, -\frac{3}{5}, \left(0, -\frac{2}{5}\right) \right]. \end{aligned}$$

Ora ripetiamo i medesimi conti per $\overrightarrow{M_2}$.

	A_0	B_0	C_0	D_0	E_0	F_0
$S = 0$	$x_0 y_0$	$x'_0 y'_0$	$x_1 y_4$	$x'_1 y'_4$	$x_2 y_3$	$x'_2 y'_3$
M	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$
A	$(-\frac{6}{5}, -1)$	$(-\frac{1}{5}, -1)$	$(-\frac{1}{5}, 0)$	$(-\frac{1}{5}, 0)$	$(-\frac{1}{5}, -1)$	$(-\frac{1}{5}, -1)$

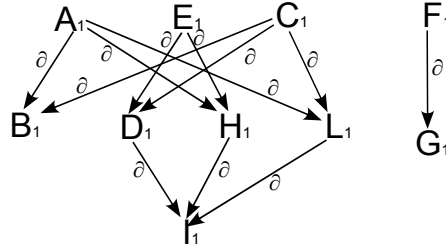
	G_0	H_0	I_0	L_0
$S = 0$	$x_3 y_2$	$x'_3 y'_2$	$x_4 y_1$	$x'_4 y'_1$
M	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$
A	$(-\frac{1}{5}, 0)$	$(-\frac{1}{5}, 0)$	$(-\frac{1}{5}, 0)$	$(-\frac{6}{5}, 0)$



Le catene $A_0, L_0, B_0 \sim F_0$ e $C_0 I_0 \sim G_0 I_0$ sono quattro generatori di $H(C(\Gamma_2), \partial)$ aventi grado di spin 0.

	A_1	B_1	C_1	D_1	E_1	F_1
$S = 1$	$x_0 y_1$	$x'_0 y'_1$	$x_1 y_0$	$x'_1 y'_0$	$x_2 y_4$	$x'_2 y'_4$
M	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
A	$(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$	$(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$	$(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$	$(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$	$(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$	$(\frac{2}{5}, -\frac{2}{5})$

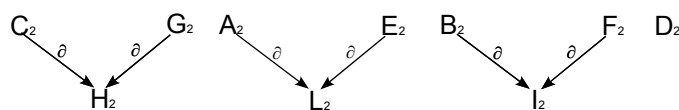
	G_1	H_1	I_1	L_1
$S = 1$	$x_3 y_3$	$x'_3 y'_3$	$x_4 y_2$	$x'_4 y'_2$
M	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{7}{5}$
A	$(\frac{2}{5}, -\frac{2}{5})$	$(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$	$(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$	$(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$



Le catene $A_1 C_1 E_1$ e B_1 sono due generatori di $H(C(\Gamma_2), \partial)$ aventi grado di spin 1.

	A_2	B_2	C_2	D_2	E_2	F_2
$S = 2$	$x_0 y_2$	$x'_0 y'_2$	$x_1 y_1$	$x'_1 y'_1$	$x_2 y_0$	$x'_2 y'_0$
M	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{3}{5}$
A	$(-1, -\frac{4}{5})$	$(0, -\frac{4}{5})$	$(0, \frac{1}{5})$	$(-1, \frac{1}{5})$	$(-1, -\frac{4}{5})$	$(0, -\frac{4}{5})$

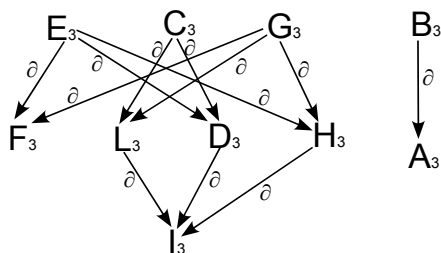
	G_2	H_2	I_2	L_2
$S = 2$	$x_3 y_4$	$x'_3 y'_4$	$x_4 y_3$	$x'_4 y'_3$
M	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{13}{5}$
A	$(0, \frac{1}{5})$	$(0, \frac{1}{5})$	$(0, -\frac{4}{5})$	$(-1, -\frac{4}{5})$



Le catene $\mathbf{C}_2\mathbf{G}_2$, $\mathbf{A}_2\mathbf{E}_2$, $\mathbf{B}_2\mathbf{F}_2$ e \mathbf{D}_2 sono quattro generatori di $H(C(\Gamma_2), \partial)$ aventi grado di spin 2.

	\mathbf{A}_3	\mathbf{B}_3	\mathbf{C}_3	\mathbf{D}_3	\mathbf{E}_3	\mathbf{F}_3
$\mathbf{S} = 3$	x_3y_0	$x'_3y'_0$	x_1y_2	$x'_1y'_2$	x_2y_1	$x'_2y'_1$
\mathbf{M}	-2	-1	0	-1	0	-1
\mathbf{A}	$(-\frac{2}{5}, -\frac{6}{5})$	$(-\frac{2}{5}, -\frac{6}{5})$	$(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$	$(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$	$(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$	$(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$

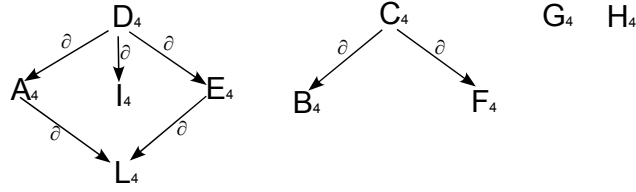
	\mathbf{G}_3	\mathbf{H}_3	\mathbf{I}_3	\mathbf{L}_3
$\mathbf{S} = 3$	x_3y_0	$x'_3y'_0$	x_4y_4	$x'_4y'_4$
\mathbf{M}	0	-1	-2	-1
\mathbf{A}	$(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$	$(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$	$(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$	$(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$



Le catene $\mathbf{C}_3\mathbf{E}_3\mathbf{G}_3$ e \mathbf{F}_3 sono due generatori di $H(C(\Gamma_2), \partial)$ aventi grado di spin 3.

	\mathbf{A}_4	\mathbf{B}_4	\mathbf{C}_4	\mathbf{D}_4	\mathbf{E}_4	\mathbf{F}_4
$\mathbf{S} = 4$	x_0y_4	$x'_0y'_4$	x_1y_3	$x'_1y'_3$	x_2y_2	$x'_2y'_2$
\mathbf{M}	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{3}{5}$
\mathbf{A}	$(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$	$(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5})$	$(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5})$	$(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$	$(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$	$(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5})$

	G_4	H_4	I_4	L_4
$S = 4$	$x_3 y_1$	$x'_3 y'_1$	$x_4 y_0$	$x'_4 y'_0$
M	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{13}{5}$
A	$(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$	$(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$	$(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$	$(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$



Le catene $G_4, H_4, B_4 \sim F_4$ e $A_4 I_4 \sim E_4 I_4$ sono quattro generatori di $H(C(\Gamma_2), \partial)$ aventi grado di spin 4.

Per il Teorema 3.4.2, $H(C(\Gamma_2), \partial) \cong \widehat{HFL}(\overrightarrow{M_2})$, dunque:

$$\begin{aligned}
\widehat{HFL}(\overrightarrow{M_2}) \cong H(C(\Gamma_2), \partial) \cong & \mathbb{Z}_2 \left[0, -\frac{12}{5}, (-\frac{6}{5}, -1) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[0, -\frac{7}{5}, (-\frac{6}{5}, 0) \right] \oplus \\
& \oplus \mathbb{Z}_2 \left[0, -\frac{7}{5}, (-\frac{1}{5}, -1) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[0, -\frac{2}{5}, (-\frac{1}{5}, 0) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[1, -\frac{2}{5}, (-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}) \right] \oplus \\
& \oplus \mathbb{Z}_2 \left[1, -\frac{7}{5}, (-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[2, \frac{2}{5}, (0, \frac{1}{5}) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[2, -\frac{8}{5}, (-1, -\frac{4}{5}) \right] \oplus \\
& \oplus \mathbb{Z}_2 \left[2, -\frac{3}{5}, (0, -\frac{4}{5}) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[2, -\frac{3}{5}, (-1, \frac{1}{5}) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[3, 0, (-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}) \right] \oplus \\
& \oplus \mathbb{Z}_2 \left[3, -1, (-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[4, \frac{2}{5}, (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[4, -\frac{3}{5}, (-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}) \right] \oplus \\
& \oplus \mathbb{Z}_2 \left[4, -\frac{8}{5}, (-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) \right] \oplus \mathbb{Z}_2 \left[4, -\frac{3}{5}, (\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}) \right].
\end{aligned}$$

Appendice A

Programma per il calcolo delle gradazioni della \widehat{HFL}

In questa appendice è riportato il codice del programma, utilizzato negli esempi del Capitolo 4, per calcolare le gradazioni dei generatori della \widehat{HFL} nel caso di link in $L(p, q)$. Il codice è stato scritto nel linguaggio di Matematica e come dati iniziali sono impostati quelli utilizzati nell'Esempio 4.2.4.

```
(*Programma per calcolare le gradazioni di Maslov e di
Alexander nel caso di nodi o link a 2 componenti con
grid number 2 in  $L(p, q)$ *)
(*Inserire n, p, q per un link con "num" componenti di
grid number n in  $L(p, q)$ *)
(*comp[[i]] indica il grid number della componente
i-esima del link*)
q=2;
n=2;
p=5;
num=2;
comp=Array[0, n, 1];
comp[[1]]=1;
comp[[2]]=1;

(*Calcolo del termine correttivo dpq*)
dpq=0; dabc={{0},{0},{0},{0},{0},{0},{0},{0},{0},{0}};
a=p; b=q; c=q-1; i=0;
While[a!=1 || b!=0 || c!=0, i++; dabc[[i]]=(ab-(2c+1
```

```

-a-b)^2)/(4ab);
  f=a; a=b;
c=Mod[c,b]; b=Mod[f,b];]
For[j=1, j< 11, dpq=dpq+(-1)^(j+ 1)
dabc[[j]]; j++ ];

(*M matrice cambio di base*)
M={{np, nq},{0, n}};

(*Inizializzazione array*)
OOO=Array[0, n, n]; Z=Array[0, n, n]; coordO=Array[0, n, n];
coordZ=Array[0, n, n];

(*Inserire in quale delle n righe e in quale delle np colonne
va posizionato ciascun elemento di O e di Z*)
(*esempio.
coordO[[1]]= {2, 1} significa che la prima delle n componenti di O
giace nella seconda riga e nella prima colonna del grid diagram*)
coordO[[1]]= {2, 1}; coordO[[2]]= {1, 2}; coordZ[[1]]= {2, 5};
coordZ[[2]]= {1, 6};

(*Inizializzazione array*)
colO=Array[0, n];
(*trova la colonna tra 1 e p*)
b=Mod[coordO[[1, 2]]+1, n];
colO[[1]]=(coordO[[1, 2]]+1-b)/n ;
b=Mod[coordO[[2, 2]]+1, n];
colO[[2]]=(coordO[[2, 2]]+1-b)/n ;

(*Calcolo delle coordinate di O/Z nel piano*)
For[k=1, k<=n, OOO[[k]]= {(1/(2n p))+(coordO[[k, 2]]-1)/(np)-
(q/p)(1/(2n)+(coordO[[k, 1]]-1)/n), 1/(2n)+(coordO[[k, 1]]-1)/n};
k++]
For[k=1, k<=n, Z[[k]]= {(1/(2n p))+(coordZ[[k, 2]]-1)/(np)-
(q/p)(1/(2n)+(coordZ[[k, 1]]-1)/n), 1/(2n)+(coordZ[[k, 1]]-1)/n};
k++]

(*Inizializzazione array*)
x=Array[0, p, n]; y=Array[0, p, n]; X=Array[0, p, n];
Y=Array[0, p, n]; OO=Array[0, n, p, n]; ZZ=Array[0, n, p, n];
xx=Array[0, p, p, n]; yy=Array[0, p, p, n]; XX=Array[0, p, p, n];

```

```
YY=Array[0, p, p, n]; Oo={{0, 0},{0, 0}}; Zz={{0, 0},{0, 0}};
o=0; z=0;
```

```
(* Calcolo delle coordinate xi/yi/Xi/Yi*)
(*nb. dipendono dal grado spin*)
For[i=1, i<=p, x[[i]]={ (i-1)/p, 0}; X[[i]]={1/(np)+
(i-1)/p, 0}; y[[i]]={Mod[(-q)/(pn)-(q-1)/(p)+1/(np)+
(i-1)/p+(colO[[1]]-1+colO[[2]]-1)/(pn), 1], 1/n};
Y[[i]]={Mod[(-q)/(pn)-(q-1)/(p)+(i-1)/p+(colO[[1]]-
1+colO[[2]]-1)/(pn), 1], 1/n}; i++]

(* Cambio di base*)
For[i=1, i<=n, OOO[[i]]=M.OOO[[i]]; Z[[i]]=M.Z[[i]]; i++]
For[i=1, i<=p, x[[i]]=M.x[[i]]; y[[i]]=M.y[[i]];
X[[i]]=M.X[[i]]; Y[[i]]=M.Y[[i]]; i++]
```

```
(* Scrittura array delle coordinate*)
For[j=1, j<=n, OO[[j]]=Table[{Mod[OOO[[j]][[1]]+knq, np],
OOO[[j]][[2]]+nk}, {k, 0, p-1}]; j++]
For[j=1, j<=n, ZZ[[j]]=Table[{Mod[Z[[j]][[1]]+knq, np],
Z[[j]][[2]]+nk}, {k, 0, p-1}]; j++]
For[i=1, i<=p, xx[[i]]=Table[{Mod[x[[i]][[1]]+knq, np],
x[[i]][[2]]+nk}, {k, 0, p-1}]; i++]
For[i=1, i<=p, XX[[i]]=Table[{Mod[X[[i]][[1]]+knq, np],
X[[i]][[2]]+nk}, {k, 0, p-1}]; i++]
For[i=1, i<=p, yy[[i]]=Table[{Mod[y[[i]][[1]]+knq, np],
y[[i]][[2]]+nk}, {k, 0, p-1}]; i++]
For[i=1, i<=p, YY[[i]]=Table[{Mod[Y[[i]][[1]]+knq, np],
Y[[i]][[2]]+nk}, {k, 0, p-1}]; i++]
```

```
(* Calcolo dei termini  $I(x, O)$ ,  $I(y, O)$ ,  $I(O, x)$ ,  $I(O, y)$ 
da utilizzare per stabilire il grado di Maslov*)
```

```
(* I(xi, O)*)
xO=Array[0, p, n];
For[i=1, i<=p, xO[[i]]={0, 0}; i++]
For[l=1, l<=n, For[k=1, k<=p, For[j=1, j<=p, For[i=1, i<=p,
xO[[k, l]]=xO[[k]][[1]]+If[xx[[k]][[j]][[1]]<OO[[1]][[i]][[1]]
&& xx[[k]][[j]][[2]]<OO[[1]][[i]][[2]], 1, 0]; i++]; j++];
k++]; l++];
```

```
(* I(yi, O)*)
```

```

yO=Array[0, p, n];
For[i=1, i<=p, yO[[i]]={0, 0}; i++];
For[l=1, l<=n, For[k=1, k<=p, For[j=1, j<=p, For[i=1, i<=p,
yO[[k, l]]=yO[[k]][[l]]+ If[yy[[k]][[j]][[1]] < oo[[l]][[i]][[1]]
&& yy[[k]][[j]][[2]] < oo[[l]][[i]][[2]], 1, 0]; i++]; j++];
k++]; l++];

```

```

(*I(O, xi)*)
Ox=Array[0, p, n];
For[i=1, i<=p, Ox[[i]]={0, 0}; i++];
For[l=1, l<=n, For[k=1, k<=p, For[j=1, j<=p, For[i=1, i<=p,
Ox[[k, l]]=Ox[[k]][[l]]+ If[oo[[l]][[i]][[1]] < xx[[k]][[j]][[1]]
&& oo[[l]][[i]][[2]] < xx[[k]][[j]][[2]], 1, 0]; i++]; j++];
k++]; l++];

```

```

(*I(O, yi)*)
Oy=Array[0, p, n];
For[i=1, i<=p, Oy[[i]]={0, 0}; i++];
For[l=1, l<=n, For[k=1, k<=p, For[j=1, j<=p, For[i=1, i<=p,
Oy[[k, l]]=Oy[[k]][[l]]+ If[oo[[l]][[i]][[1]] < yy[[k]][[j]][[1]]
&& oo[[l]][[i]][[2]] < yy[[k]][[j]][[2]], 1, 0]; i++]; j++];
k++]; l++];

```

```

(*I(Xi, O)*)
XO=Array[0, p, n];
For[i=1, i<=p, XO[[i]]={0, 0}; i++];
For[l=1, l<=n, For[k=1, k<=p, For[j=1, j<=p, For[i=1, i<=p,
XO[[k, l]]=XO[[k]][[l]]+ If[xx[[k]][[j]][[1]] < oo[[l]][[i]][[1]]
&& xx[[k]][[j]][[2]] < oo[[l]][[i]][[2]], 1, 0]; i++]; j++];
k++]; l++];

```

```

(*I(Yi, O)*)
YO=Array[0, p, n];
For[i=1, i<=p, YO[[i]]={0, 0}; i++];
For[l=1, l<=n, For[k=1, k<=p, For[j=1, j<=p, For[i=1, i<=p,
YO[[k, l]]=YO[[k]][[l]]+ If[yy[[k]][[j]][[1]] < oo[[l]][[i]][[1]]
&& yy[[k]][[j]][[2]] < oo[[l]][[i]][[2]], 1, 0]; i++]; j++];
k++]; l++];

```

```

(*I(O, Xi)*)
OX=Array[0, p, n];

```

```

For [i=1, i<=p, OX[[i]]= {0, 0}; i++];
For [l=1, l<=n, For [k=1, k<=p, For [j=1, j<=p, For [i=1, i<=p,
OX[[k, l]] =OX[[k]][[l]]+ If [OO[[l]][[i]][[1]] <XX[[k]][[j]][[1]]
&& OO[[l]][[i]][[2]] <XX[[k]][[j]][[2]], 1, 0]; i++]; j++];
k++]; l++];

```

```

(* I(O, Yi)*)
OY=Array [0, p, n];
For [i=1, i<=p, OY[[i]]= {0, 0}; i++];
For [l=1, l<=n, For [k=1, k<=p, For [j=1, j<=p, For [i=1, i<=p,
OY[[k, l]]=OY[[k]][[l]]+ If [OO[[l]][[i]][[1]] <YY[[k]][[j]][[1]]
&& OO[[l]][[i]][[2]] <YY[[k]][[j]][[2]], 1, 0]; i++]; j++];
k++]; l++];

```

```

(* I(xi, Z)*)
xZ=Array [0, p, n];
For [i=1, i<=p, xZ[[i]]= {0, 0}; i++];
For [l=1, l<=n, For [k=1, k<=p, For [j=1, j<=p, For [i=1, i<=p,
xZ[[k, l]]=xZ[[k]][[l]]+ If [xx[[k]][[j]][[1]] <ZZ[[l]][[i]][[1]]
&& xx[[k]][[j]][[2]] <ZZ[[l]][[i]][[2]], 1, 0]; i++]; j++];
k++]; l++];

```

```

(* I(yi, Z)*)
yZ=Array [0, p, n];
For [i=1, i<=p, yZ[[i]]= {0, 0}; i++];
For [l=1, l<=n, For [k=1, k<=p, For [j=1, j<=p, For [i=1, i<=p,
yZ[[k, l]]=yZ[[k]][[l]]+ If [yy[[k]][[j]][[1]] <ZZ[[l]][[i]][[1]]
&& yy[[k]][[j]][[2]] <ZZ[[l]][[i]][[2]], 1, 0]; i++]; j++];
k++]; l++];

```

```

(* I(Z, xi)*)
Zx=Array [0, p, n];
For [i=1, i<=p, Zx[[i]]= {0, 0}; i++];
For [l=1, l<=n, For [k=1, k<=p, For [j=1, j<=p, For [i=1, i<=p,
Zx[[k, l]]=Zx[[k]][[l]]+ If [ZZ[[l]][[i]][[1]] <xx[[k]][[j]][[1]]
&& ZZ[[l]][[i]][[2]] <xx[[k]][[j]][[2]], 1, 0]; i++]; j++];
k++]; l++];

```

```

(* I(Z, yi)*)
Zy=Array [0, p, n];
For [i=1, i<=p, Zy[[i]]= {0, 0}; i++];

```

```

For [l=1, l<=n, For [k=1, k<=p, For [j=1, j<=p, For [i=1, i<=p,
Zy [[k, l]]=Zy [[k]] [[l]]+ If [ZZ [[l]] [[i]] [[1]] < yy [[k]] [[j]] [[1]]
&& ZZ [[l]] [[i]] [[2]] < yy [[k]] [[j]] [[2]] , 1, 0]; i++; j++;
k++; l++;

```

(**I(Xi, Z)**)

```

XZ=Array [0, p, n];
For [i=1, i<=p, XZ [[i]]= {0, 0}; i++;
For [l=1, l<=n, For [k=1, k<=p, For [j=1, j<=p, For [i=1, i<=p,
XZ [[k, l]]=XZ [[k]] [[l]]+ If [XX [[k]] [[j]] [[1]] < ZZ [[l]] [[i]] [[1]]
&& XX [[k]] [[j]] [[2]] < ZZ [[l]] [[i]] [[2]] , 1, 0]; i++; j++;
k++; l++;

```

(**I(Yi, Z)**)

```

YZ=Array [0, p, n];
For [i=1, i<=p, YZ [[i]]= {0, 0}; i++;
For [l=1, l<=n, For [k=1, k<=p, For [j=1, j<=p, For [i=1, i<=p,
YZ [[k, l]]=YZ [[k]] [[l]]+ If [YY [[k]] [[j]] [[1]] < ZZ [[l]] [[i]] [[1]]
&& YY [[k]] [[j]] [[2]] < ZZ [[l]] [[i]] [[2]] , 1, 0]; i++; j++;
k++; l++;

```

(**I(Z, Xi)**)

```

ZX=Array [0, p, n];
For [i=1, i<=p, ZX [[i]]= {0, 0}; i++;
For [l=1, l<=n, For [k=1, k<=p, For [j=1, j<=p, For [i=1, i<=p,
ZX [[k, l]]=ZX [[k]] [[l]]+ If [ZZ [[l]] [[i]] [[1]] < XX [[k]] [[j]] [[1]]
&& ZZ [[l]] [[i]] [[2]] < XX [[k]] [[j]] [[2]] , 1, 0]; i++; j++;
k++; l++;

```

(**I(Z, Yi)**)

```

ZY=Array [0, p, n];
For [i=1, i<=p, ZY [[i]]= {0, 0}; i++;
For [l=1, l<=n, For [k=1, k<=p, For [j=1, j<=p, For [i=1, i<=p,
ZY [[k, l]]=ZY [[k]] [[l]]+ If [ZZ [[l]] [[i]] [[1]] < YY [[k]] [[j]] [[1]]
&& ZZ [[l]] [[i]] [[2]] < YY [[k]] [[j]] [[2]] , 1, 0]; i++; j++;
k++; l++;

```

(**I(xi, xi)**)

```

x=Array [0, {p, p}];
For [i=1, i<=p, For [j=1, j<=p, x [[i, j]]=0; j++; i++;
For [k=1, k<=p, For [j=1, j<=p, For [i=1, i<=p,

```

```

x[[k, k]]=x[[k, k]]+ If[xx[[k]][[j]][[1]] < xx[[k]][[i]][[1]]
&& xx[[k]][[j]][[2]] < xx[[k]][[i]][[2]], 1, 0]; i++; j++;
k++]

```

```

(* I(Xi, Xi)*)
X=Array[0, {p, p}];
For[i=1, i<=p, For[j=1, j<=p, X[[i, j]]=0; j++; i++];
For[k=1, k<=p, For[j=1, j<=p, For[i=1, i<=p,
X[[k, k]]=X[[k, k]]+ If[XX[[k]][[j]][[1]] < XX[[k]][[i]][[1]]
&& XX[[k]][[j]][[2]] < XX[[k]][[i]][[2]], 1, 0]; i++; j++;
k++]

```

```

(* I(yi, yi)*)
y=Array[0, {p, p}];
For[i=1, i<=p, For[j=1, j<=p, y[[i, j]]=0; j++; i++];
For[k=1, k<=p, For[j=1, j<=p, For[i=1, i<=p,
y[[k, k]]=y[[k, k]]+ If[yy[[k]][[j]][[1]] < yy[[k]][[i]][[1]]
&& yy[[k]][[j]][[2]] < yy[[k]][[i]][[2]], 1, 0]; i++; j++;
k++]

```

```

(* I(Yi, Yi)*)
Y=Array[0, {p, p}];
For[i=1, i<=p, For[j=1, j<=p, Y[[i, j]]=0; j++; i++];
For[k=1, k<=p, For[j=1, j<=p, For[i=1, i<=p,
Y[[k, k]]=Y[[k, k]]+ If[YY[[k]][[j]][[1]] < YY[[k]][[i]][[1]]
&& YY[[k]][[j]][[2]] < YY[[k]][[i]][[2]], 1, 0]; i++; j++;
k++]

```

```

(* I(xi, yj)*)
xy=Array[0, {p, p}];
For[i=1, i<=p, For[j=1, j<=p, xy[[i, j]]=0; j++; i++];
For[l=1, l<=p, For[k=1, k<=p, For[j=1, j<=p, For[i=1, i<=p,
xy[[l, k]]=xy[[l, k]]+ If[xx[[l]][[j]][[1]] < yy[[k]][[i]][[1]]
&& xx[[l]][[j]][[2]] < yy[[k]][[i]][[2]], 1, 0]; i++; j++;
k++; l++]

```

```

(* I(yi, xj)*)
yx=Array[0, {p, p}];
For[i=1, i<=p, For[j=1, j<=p, yx[[i, j]]=0; j++; i++];
For[l=1, l<=p, For[k=1, k<=p, For[j=1, j<=p, For[i=1, i<=p,
yx[[l, k]]=yx[[l, k]]+ If[yy[[l]][[j]][[1]] < xx[[k]][[i]][[1]]

```

```
&& yy[[1]][[j]][[2]] < xx[[k]][[i]][[2]] , 1, 0]; i++; j++;
k++; l++]
```

```
(*I(Xi, Yj)*)
XY=Array[0, {p, p}];
For[i=1, i<=p, For[j=1, j<=p, XY[[i, j]]=0; j++; i++];
For[l=1, l<=p, For[k=1, k<=p, For[j=1, j<=p, For[i=1, i<=p,
XY[[l, k]]=XY[[l, k]]+If[XX[[1]][[j]][[1]] < YY[[k]][[i]][[1]]
&& XX[[1]][[j]][[2]] < YY[[k]][[i]][[2]] , 1, 0]; i++; j++;
k++; l++]
```

```
(*I(Yi, Xj)*)
YX=Array[0, {p, p}];
For[i=1, i<=p, For[j=1, j<=p, YX[[i, j]]=0; j++; i++];
For[l=1, l<=p, For[k=1, k<=p, For[j=1, j<=p, For[i=1, i<=p,
YX[[l, k]]=YX[[l, k]]+If[YY[[1]][[j]][[1]] < XX[[k]][[i]][[1]]
&& YY[[1]][[j]][[2]] < XX[[k]][[i]][[2]] , 1, 0]; i++; j++;
k++; l++]
```

```
For[l=1, l<=n, For[k=1, k<=n, For[j=1, j<=p, For[i=1, i<=p,
Oo[[l, k]]=Oo[[l, k]]+If[OO[[1]][[j]][[1]] < OO[[k]][[i]][[1]]
&& OO[[1]][[j]][[2]] < OO[[k]][[i]][[2]] , 1, 0]; i++; j++;
k++; l++]
```

```
For[l=1, l<=n, For[k=1, k<=n, For[j=1, j<=p, For[i=1, i<=p,
Zz[[l, k]]=Zz[[l, k]]+If[ZZ[[1]][[j]][[1]] < ZZ[[k]][[i]][[1]]
&& ZZ[[1]][[j]][[2]] < ZZ[[k]][[i]][[2]] , 1, 0]; i++; j++;
k++; l++]
```

```
For[i=1, i<=n, For[j=1, j<=n, o=o+Oo[[i]][[j]]; j++; i++]
For[i=1, i<=n, For[j=1, j<=n, z=z+Zz[[i]][[j]]; j++; i++]
```

```
(*Inizializzazione array che conterranno le gradazioni di
Maslov e di Alexander*)
M=Array[0, {n, n, p, p}]; A=Array[0, {n, p, p}];
```

```
(* Mx0y0:i indica O o Z, j indica x o X, k indica x0/x1...,
l indica y0/y1. .. *)
(*Calcolo del grado di Maslov di x/y rispetto a O*)
For[i=1, i<=p, For[j=1, j<=p, M[[1, 1, i, j]]=1/p(x[[i]][[i]]+
y[[j]][[j]]+xy[[i]][[j]]+yx[[j]][[i]]+o-(xO[[i]][[1]]+

```

```
Ox[[i]][[1]]+yO[[j]][[1]]+Oy[[j]][[1]]+xO[[i]][[2]]+
Ox[[i]][[2]]+yO[[j]][[2]]+Oy[[j]][[2]])+1)+dpq+(p-1)/p;
j++; i++]
```

```
(* Calcolo del grado di Maslov di X/Y rispetto a O*)
For[i=1, i<=p, For[j=1, j<=p, M[[1, 2, i, j]]=1/p(X[[i]][[i]]+
Y[[j]][[j]]+XY[[i]][[j]]+YX[[j]][[i]]+o-(XO[[i]][[1]]+
OX[[i]][[1]]+YO[[j]][[1]]+OY[[j]][[1]]+XO[[i]][[2]]+
OX[[i]][[2]]+YO[[j]][[2]]+OY[[j]][[2]])+1)+
dpq+(p-1)/p ; j++; i++]
```

```
(* Calcolo del grado di Maslov di x/y rispetto a Z*)
For[i=1, i<=p, For[j=1, j<=p, M[[2, 1, i, j]]=1/p(x[[i]][[i]]+
y[[j]][[j]]+xy[[i]][[j]]+yx[[j]][[i]]+z-(xZ[[i]][[1]]+
Zx[[i]][[1]]+yZ[[j]][[1]]+Zy[[j]][[1]]+xZ[[i]][[2]]+
Zx[[i]][[2]]+yZ[[j]][[2]]+Zy[[j]][[2]])+1)+
dpq+(p-1)/p; j++; i++]
```

```
(* Calcolo del grado di Maslov di X/Y rispetto a Z*)
For[i=1, i<=p, For[j=1, j<=p, M[[2, 2, i, j]]=1/p(X[[i]][[i]]+
Y[[j]][[j]]+XY[[i]][[j]]+YX[[j]][[i]]+z-(XZ[[i]][[1]]+
ZX[[i]][[1]]+YZ[[j]][[1]]+ZY[[j]][[1]]+XZ[[i]][[2]]+
ZX[[i]][[2]]+YZ[[j]][[2]]+ZY[[j]][[2]])+1)+dpq+(p-1)/p;
j++; i++]
```

```
(* Caso nodo*)
If[num==1,
(* Calcolo grado di Alexander*)
For[k=1, k<=n, For[i=1, i<=p, For[j=1, j<=p, A[[k, i, j]]=
1/2 (M[[1, k, i, j]]-M[[2, k, i, j]]-(n-1)); j++; i++; k++]
```

```
(*Stampa gradazione di Maslov e di Alexander*)
For[i=1, i<=p, For[j=1, j<=p, a=M[[1, 1, i, j]]; b=A[[1, i, j]];
Print['x', i-1, 'y', j-1, 'Spin:', Mod[(i+j-2), p], 'Mas:', a[[1]], 'Alex:', b[[1]]]; j++; i++;
For[i=1, i<=p, For[j=1, j<=p, a=M[[1, 2, i, j]]; b=A[[2, i, j]];
Print['x', i-1, 'y', j-1, 'Spin:', Mod[(i+j-2), p], 'Mas:', a[[1]], 'Alex:', b[[1]]]; j++; i++];
(*Fine caso nodo*)
```

```
(* Caso link a 2componenti*)
```

```

If [num==2,
ML=Array[0, {num, n, n, p, p}]; AL=Array[0, {num, n, p, p}];
(* Calcoli intermedi per stabilire il grado di Alexander*)
For [l=1,l<=num,For [i=1,i<=p,For [j=1,j<=p,ML[[l, 1, 1, i, j]]=
1/p(x[[i]][[i]]+y[[j]][[j]]+xy[[i]][[j]]+yx[[j]][[i]]+
Oo[[l, 1]]-(xO[[i]][[1]]+Ox[[i]][[1]]+yO[[j]][[1]]+
Oy[[j]][[1]])+1)+dpq+(p-1)/p ; j++; i++; l++)

(* ora calcolo quello di X/Y rispetto a O*)
For [l=1,l<=num,For [i=1,i<=p,For [j=1,j<=p,ML[[l, 1, 2, i, j]]=
1/p(X[[i]][[i]]+Y[[j]][[j]]+XY[[i]][[j]]+YX[[j]][[i]]+
Oo[[l, 1]]-(XO[[i]][[1]]+OX[[i]][[1]]+YO[[j]][[1]]+
OY[[j]][[1]])+1)+dpq+(p-1)/p ; j++; i++; l++)

(* Il primo n indica Z1 o Z2 per il grado di Maslov*)
For [l=1,l<=num,For [i=1,i<=p,For [j=1,j<=p,ML[[l, 2, 1, i, j]]=
1/p(x[[i]][[i]]+y[[j]][[j]]+xy[[i]][[j]]+yx[[j]][[i]]+
Zz[[l, 1]]-(xZ[[i]][[1]]+Zx[[i]][[1]]+yZ[[j]][[1]]+
Zy[[j]][[1]])+1)+dpq+(p-1)/p ; j++; i++; l++)

(* ora calcolo quello di X/Y rispetto a Z*)
For [l=1,l<=num,For [i=1,i<=p,For [j=1, j<=p,ML[[l, 2, 2, i, j]]=
1/p(X[[i]][[i]]+Y[[j]][[j]]+XY[[i]][[j]]+YX[[j]][[i]]+
Zz[[l, 1]]-(XZ[[i]][[1]]+ZX[[i]][[1]]+YZ[[j]][[1]]+
ZY[[j]][[1]])+1)+dpq+(p-1)/p ; j++; i++; l++)

(* Calcolo bigradazione di Alexander*)
For [l=1, l<=num,For [k=1, k<=n, For [i=1, i<=p, For [j=1, j<=p,
AL[[l, k, i, j]]=1/2 (ML[[l, 1, k, i, j]]-ML[[l, 2, k, i, j]]
-(comp[[l]] -1));j++; i++; k++; l++];
For [i=1,i<=p, For [j=1, j<=p, a=M[[l, 1, i, j]]; b=AL[[l, 1, i, j]];
c=AL[[num, 1, i, j]]; Print [‘‘x’’, i-1, ‘‘y’’, j-1, ‘‘ Spin :’’,
Mod[(i+j-2), p], ‘‘; Masl:’’, a[[1]], ‘‘; Alex:’’, ‘‘(’’, b[[1]],
‘‘,’’, c[[1]], ‘‘)’’ ]; j++; i++];
For [i=1, i<=p, For [j=1, j<=p, a=M[[l, 2, i, j]]; b=AL[[l, 2, i, j]];
c=AL[[num, 1, i, j]]; Print [‘‘x’’, i-1, ‘‘y’’, j-1, ‘‘ Spin :’’,
Mod[(i+j-2), p], ‘‘; Mas:’’, a[[1]], ‘‘; Alex:’’, ‘‘(’’, b[[1]],
‘‘,’’, c[[1]], ‘‘)’’ ]; j++; i++];

```

Bibliografia

- [Ale19] Alexander, James W. *Note on two threedimensional manifolds with the same group*. Trans. Amer. Math. Soc. **20**, 1919, 339-342.
- [BGH08] Baker, Kenneth L.; Grigsby, Julia E.; Hedden, Matthew *Grid diagrams for lens spaces and combinatorial knot Floer homology*. Int. Math. Res. Not. **10**, 2008, Art. ID rnm024.
- [BM11] Buck, Dorothy; Mauricio, Mauro *Connect sum of lens spaces surgeries: application to H in recombination*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **150**, 2011, 505-525.
- [CMM13] Cattabriga, Alessia; Manfredi, Enrico; Mulazzani Michele *On knots and links in lens spaces*. Topology Appl. **160**, 2013, 430-442.
- [Dyc85] Dyck, Walther *On the "Analysis situs" of three-dimensional spaces*. British Assoc. Adv. Sci. Rept. **54**, 1885, 648.
- [Gri06] Grigsby, Julia E. *Knot Floer homology in cyclic branched covers*. Algebr. Geom. Topol. **6**, 2006, 1355-1398.
- [GRS08] Grigsby, Julia E.; Ruberman, Daniel; Strle, Sašo *Knot concordance and Heegaard Floer homology invariants in branched covers*. Geom. Topol. **12**, 2008, 2249-2275.
- [Hat00] Hatcher, Allen *Notes on basic 3-manifold topology*. 2000, <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3Mfds.pdf>.
- [Hat02] Hatcher, Allen *Algebraic topology*. 2002, Cambridge University Press.
- [Jon89] Jones, Vaughan F. R. *On knot invariants related to some statistical mechanical models*. Pacific J. Math. **137**, 1989, 311-334.
- [Man13] Manfredi, Enrico *Lifting knots and links from lens spaces to the 3-sphere*. Preprint, 2013.
- [Mni10] Manion, Andrew *Heegaard Floer Homology and Knots*. 2010, <http://web.math.princeton.edu/~amanion/Heegaard Floer homology.pdf>.

- [MOS06] Manolescu, Ciprian; Ozsváth, Peter; Sarkar, Sucharit *A combinatorial description of knot Floer homology*. Ann. of Math. **169**, 2009, 633-660.
- [Mil63] Milnor, John *Morse theory*. Ann. Math. Stud. **51**, 1963, Princeton University Press.
- [OS04.1] Ozsváth, Peter; Szabò, Zoltàn *Holomorphic disks and knot invariants*. Adv. Math. **186**, 2004, 58-116.
- [OS04.2] Ozsváth, Peter; Szabò, Zoltàn *Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds*. Ann. of Math. **159**, 2004, 1027-1158.
- [OS05] Ozsváth, Peter; Szabò, Zoltàn *Holomorphic disks and link invariants*. arXiv:math/0512286v2 [math.GT], 2005.
- [OS06] Ozsváth, Peter; Szabò, Zoltàn *An introduction to Heegaard Floer homology*. Clay Math. Proc. **5**, 2006, 3-27.
- [PS97] Prasolov, Viktor V.; Sossinsky Alexei B. *Knots, links, braids and 3-manifolds*. Transl. of Math. Monographs **154**, 1997, Amer. Math. Soc.
- [Ras03] Rasmussen, Jacob A. *Floer homology and knot complements*. Ph.D. Thesis - Harvard University, 2003.
- [Rei35] Reidemeister, Kurt *Homotopieringe und Linsenräume*. Abh. Math. Semin. Hamb. Univ. **11**, 1935, 102-109.
- [Rol76] Rolfsen, Dale *Knots and links*. Math. Lecture Ser. **7**, 1976, Publish or Perish.
- [Tho67] Thomson, William *On vortex atoms*. Proc. R. Soc. of Edinburgh **VI**, 1867, 94-105.
- [Whi41] Whitehead, John H. C. *On incidence matrices, nuclei and homotopy types*. Ann. of Math. **42**, 1941, 1197-1239.